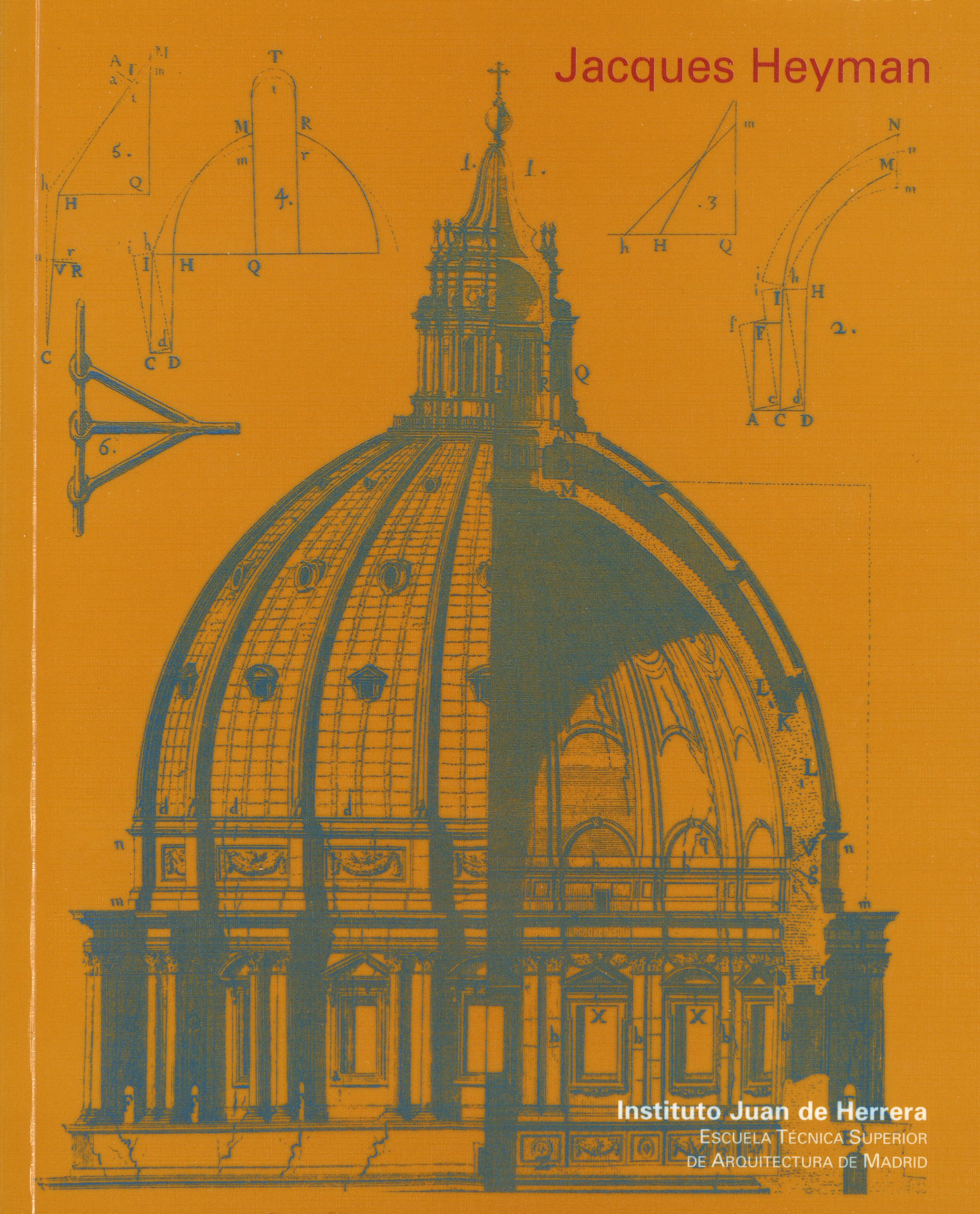
Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen II

Jacques Heyman



Instituto Juan de Herrera

Escuela Técnica Superior
de Arquitectura de Madrid

Este segundo volumen recoge los ensayos del profesor Heyman entre 1993 y 2014. Trata principalmente sobre estructuras de fábrica pero incluye también ensayos sobre estructuras de madera y otros más generales sobre la teoría de estructuras. Corresponde al profesor Heyman el mérito de haber «traducido» las teorías y teoremas del análisis límite a las fábricas. Esto supone, sin pérdida de rigor, una simplificación importante del aparato teórico pero, sobre todo, permite una comprensión cualitativa (y cuantitativa) del funcionamiento de estas construcciones.

Así, es posible entender por qué las catedrales góticas tienen arbotantes, cuál es la función de los nervios de las bóvedas de crucería o cómo se comportan los puentes de piedra. Aún más, permite explicar la enorme estabilidad de las antiguas fábricas (el Panteón de Roma lleva en pie casi dos milenios sin reparaciones estructurales. Santa Sofía soporta desde el siglo VI sismos de importancia; los puentes romanos transportan cargas muy superiores a las de su época, etc.). Además, el análisis límite de las fábricas, permite interpretar correctamente y sin alarmismos la presencia, inevitable en estas construcciones, de grietas. Éstas no son, necesariamente, signos de ruina; simplemente expresan la naturaleza del material y la adaptación del edificio a los pequeños movimientos del entorno.

La teoría de estructuras de fábrica es una parte de la teoría de estructuras. Los ensayos más generales permiten comprender mejor las particularidades de las fábricas que conducen a una formulación distinta de las ecuaciones sobre el material, que confiere a la estructura un comportamiento «dúctil», requisito indispensable de cualquier estructura.

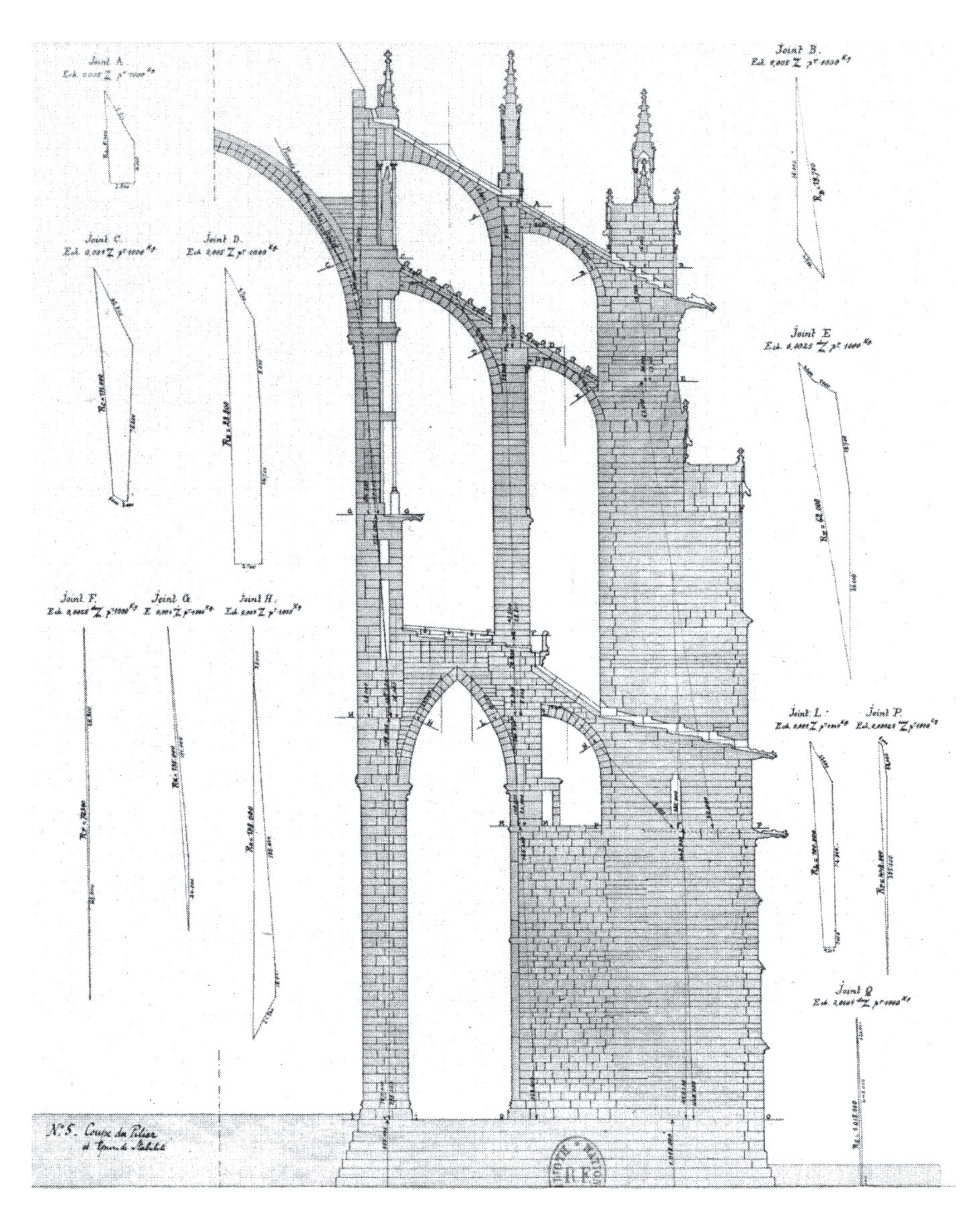
Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
Colección dirigida por Santiago Huerta

M. Arenillas et al. (Eds.). **Actas del V Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
F. Bores et al. (Eds.). **Actas del II Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
A. Casas et al. (Eds.). **Actas del I Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
A. Choisy. **El arte de construir en Roma**
A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**
A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**
A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)
I. J. Gil Crespo. (Ed.). **Historia, arquitectura y construcción fortificada**
J. Girón y S. Huerta. (Eds.) **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**
A. Graciani et al. (Eds.). **Actas del III Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
R. Guastavino. **Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura**
J. Heyman. **Análisis de estructuras: un estudio histórico**
J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica**
J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**
J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**
J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. 2 vols**
J. Heyman. **Vigas y pórticos**
S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas**
S. Huerta (Ed.). **Actas del IV Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VI Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VII Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VIII Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta (Ed.). **Las bóvedas de Guastavino en América**
S. Huerta (Ed.). **Essays in the History of the Theory of Structures**
S. Huerta (Ed.). **Proceedings of the 1st International Congress on Construction History**
J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)
J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII**
H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)
G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**
H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**
A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**
E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**
R. Willis. **La construcción de las bóvedas en la Edad Media**

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen 2



Análisis de equilibrio de Léon Benouville sobre la catedral de Beauvais. La clave de las bóvedas está a 48 metros sobre el suelo. La tensión media en el pilar de la nave es de 1,3 N/mm² («Étude sur la cathédrale de Beauvais». *Encyclopédie d'Architecture,* vol. 4, 1891-1892.)

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Colección de ensayos. Volumen 2

Jacques Heyman

edición a cargo de:
Santiago Huerta

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Madrid

ISBN: 978-84-9728-544-5 (Obra completa); ISBN: 978-84-9728-546-9 (Vol. II)
Depósito legal: M. 24391-2015
Cubierta: Análisis de la cúpula de San Pedro de Roma.
Parere di tre mattematici... Roma: 1742.
Fotocomposición e impresión:
Gracel, s. l. l.
28108 Alcobendas

Índice

Presentación

En 1995 se publicó el primer volumen de *Estructuras de fábrica* que reunía los ensayos del profesor Heyman sobre el tema publicados entre 1966 y 1993. Estos trabajos conforman, de hecho, la moderna teoría de estructuras de fábrica. El libro tuvo un éxito inmediato y en 1999 se realizó una reimpresión. Ésta llevaba agotada varios años y la demanda constante nos anima a realizar una nueva. Hemos querido hacerla coincidir con un segundo volumen de ensayos del profesor Heyman correspondientes a los años 1993–2014. De esta manera, la presente edición se compone de dos volúmenes, y ofrece un corpus casi completo de todas los artículos publicados por el profesor Heyman entre 1966 y 2014 sobre estructuras históricas. Finalmente, esta edición coincide con el noventa cumpleaños del profesor Heyman y queremos con ella rendir un homenaje a su obra y a su persona.

Cumplidos ya veinte años de la primera edición, creo que no es exagerado decir que la difusión de la obra del profesor Heyman ha mejorado notablemente el entendimiento de las estructuras de fábrica en España y, en general, el de la teoría de estructuras. La frase del noble ilustrado Julius Hardegg «si conoces lo antiguo, comprenderás lo nuevo», adquiere pleno significado si se estudia el desarrollo de la teoría estructural, campo que el profesor Heyman ha iluminado con numerosas contribuciones (véase en particular su libro *Análisis de estructuras: un estudio histórico*, en esta misma colección). En efecto, sabemos hoy que la seguridad de una estructura de fábrica es un problema de geometría: la estabilidad queda asegurada por la forma adecuada del edificio en su conjunto y de cada uno de sus elementos. Este hecho, bien conocido por los antiguos maestros constructores, se puede demostrar de forma rigurosa dentro del moderno marco del análisis límite de estructuras de fábrica, fundado por el profesor Heyman. ¿Podría ser de otra manera? ¿Podrían ser el Panteón de Roma, las catedrales góticas, Santa Sofía o Santa Maria del Fiore fruto de un empirismo ciego, de un imposible (por antieconómico e irracional) proceso de prueba y error? ¿Se levantaron las altas bóvedas de Beauvais hasta casi 50 m por si había suerte y no se caían?

El profesor Heyman nos ha regalado un conocimiento precioso, aquel que no sólo permite «hacer» sino que lleva a «entender» de manera profunda el proyecto estructural, antiguo y moderno. La teoría plástica ha demostrado, más allá de toda duda, que los métodos universales de análisis que pretenden suministrar el estado real de la estructura —automatizados hoy con cada vez más sofisticados programas de ordenador— son una quimera. Si ni siquiera podemos conocer las fuerzas en una silla de cuatro patas (véase el cap. 4 del vol. 2), mucho menos podremos conocer las fuerzas internas en las

estructuras reales que, como dice el profesor Aroca, «son sillas de muchas patas». Ciertamente, la búsqueda del «estado real» de la estructura se ha demostrado un sinsentido, y hay una evidencia experimental abrumadora que lo confirma desde los años 1920 (aunque los cambios de las fuerzas internas en los puentes de fábrica ya se habían observado cien años antes por Vicat).

El teorema de la Seguridad nos lleva, como corolario fundamental, al «enfoque del equilibrio», enunciado por primera vez por el profesor Heyman en el decenio de 1960, y que había pasado desapercibido a todos los autores anteriores que se habían ocupado de los teoremas fundamentales, desde su formulación en 1936 por el ingeniero ruso A. Gvozdev. Todavía hoy asistimos, perplejos, a la resistencia que la profesión estructural, educada en la teoría elástica clásica, opone a este hecho que no sólo se demuestra con una teoría de matemática aplicada de altos vuelos, sino que explica el fenómeno incuestionable de que este enfoque del equilibrio —que conduce en las fábricas a afirmaciones geométricas— está en la base del proyecto estructural desde los orígenes de la civilización.

Todos los escritos del profesor Heyman combinan el dominio absoluto de la teoría de estructuras con una percepción clara de su objetivo final: entender el comportamiento de las estructuras reales de manera que se puedan proyectar o analizar. Aunque el libro se centra en estructuras históricas, las observaciones teóricas se aplican también a las estructuras modernas de hormigón y acero, y el lector atento descubrirá cómo el estudio de las estructuras antiguas ilumina el proyecto y análisis de estructuras modernas. No se puede separar la teoría de la práctica: las estructuras no son una abstracción matemática y se construyen en el mundo real, con todas sus «imperfecciones».

Las estructuras de fábrica expresan la forma de construir la arquitectura con piedra o ladrillo y mortero a lo largo de milenios. Curiosamente, aunque las formas cambian enormemente las características básicas del material son las mismas y la teoría se aplica igualmente a templos griegos, catedrales góticas, iglesias tardo-barrocas o a las delgadas bóvedas tabicadas de Guastavino.

El profesor Heyman ha marcado el camino para sucesivas generaciones de arquitectos o ingenieros que trabajan en el análisis y la consolidación (en su caso) de las estructuras históricas. Podemos decir que la parte básica de la teoría de las fábricas está ya formulada, pero su aplicación requiere de estudios de detalle de las diferentes formas estructurales. El profesor Heyman ha estudiado las más importantes, pero queda todavía mucho por investigar. Por otra parte, en el campo del análisis de edificios existentes la casuística es infinita; no hay dos casos iguales y el analista debe dominar la teoría, para luego decidir qué enfoque es el más adecuado en cada caso. En un mundo de infinitas formas y problemas, la teoría es la roca que sirve de fundamento a nuestro trabajo.

Madrid, julio de 2015 Santiago Huerta

Agradecimientos

Agradezco al profesor Heyman acceder a la publicación de sus ensayos y su constante disponibilidad, durante ya más de dos decenios, para impartir su magisterio guiándonos por el amplio campo de la teoría de estructuras. La colección de Textos, que tuvo *Estructuras de fábrica I* como su primer volumen en 1995, y cuenta ya con más de treinta títulos, no hubiera sido posible sin el apoyo y los consejos de Ricardo Aroca Hernández-Ros, presidente del Instituto Juan de Herrera. Por otra parte, Antonio de las Casas, durante su periodo como gerente del CEHOPU, fue un colaborador ideal, que entendió perfectamente las dificultades del trabajo de editar libros. Agradezco también a la profesora Paula Fuentes su ayuda atenta y minuciosa en los trabajos de edición del volumen 2, incluyendo su detallado índice alfabético. Finalmente, quiero reconocer la dedicación y el excelente trabajo de todos los traductores.

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen 2

Introducción

El primer volumen de *Estructuras de fábrica* fue publicado en 1995. Contenía 28 artículos escritos entre 1966 y 1993. Dichos artículos trataban principalmente sobre la construcción de fábrica, pero mi creciente participación en proyectos de rehabilitación de edificios antiguos dio lugar a 3 artículos sobre techumbres de madera. Este segundo volumen contiene otros 27 artículos publicados entre 1993 y 2014, en su mayor parte sobre fábricas, pero nuevamente tres de ellos tratan sobre el cálculo de estructuras de madera. Hay además otros artículos que abordan, por un lado, problemas más generales del análisis estructural y, por otro, contribuciones más amplias al estudio de la Historia de la Construcción, campo que el profesor Huerta ha hecho verdaderamente suyo. Finalmente, se incluye una descripción no técnica de la aplicación de las normativas gubernamentales inglesas en el caso de las catedrales.

Inevitablemente, algunos de los temas tratados en los artículos de este libro coinciden con los del volumen anterior. En los primeros artículos el problema era convencer al lector de que la denominada teoría plástica era aplicable a las estructuras de fábrica, y por este motivo, por ejemplo, se repetía el tema del comportamiento del arco simple de dovelas. Yo mismo había comenzado a estudiar las estructuras de fábrica desde mi experiencia en el ámbito de las estructuras de acero. Comencé mi trabajo en 1946 como el último estudiante de posgrado del profesor John Baker, cuyo nombre va siempre asociado al desarrollo de la teoría plástica para el cálculo de estructuras de acero (y hay un artículo en este libro que trata sobre la implantación de los métodos plásticos en el Reino Unido) —durante los siguientes 20 años, casi todas mis publicaciones en el ámbito de la investigación trataron sobre el empleo de los métodos plásticos en estructuras de acero. No obstante, en 1949 pasé el primero de dos años de post-doctorado en la Universidad de Brown, donde el profesor Prager me dio a conocer los teoremas fundamentales sobre los que se apoyaba el trabajo que yo había estado haciendo. En concreto, aprendí que la fábrica se podía examinar empleando estos teoremas, el más importante de los cuales para un ingeniero es el «teorema del límite inferior», hoy llamado a menudo el «teorema de la seguridad». Éste dice que si se puede encontrar un estado de equilibrio *cualquiera* en el que la estructura esté «cómoda», entonces esto será garantía de que la estructura será estable. Por este motivo sería más descriptivo reemplazar el término «teoría plástica» por «teoría del equilibrio» para denominar esta herramienta fundamental del análisis de estructuras, tal como ha sugerido el profesor Huerta. Lo que resulta claro es que la «teoría elástica», que ha preocupado a los ingenieros de estructuras durante casi dos siglos, y que es necesaria para estimar las deformaciones y para predecir el pandeo, no ofrece información significativa sobre la *resistencia* de una estructura, esté ésta hecha de acero, hormigón armado, madera o fábrica.

1

La techumbre del dormitorio de los monjes, Durham

En la figura 1.1 se puede ver la sección transversal del gran dormitorio de la catedral de Durham. Las bóvedas del piso bajo se terminaron a mediados del siglo XIII; la techumbre de la sala superior, de 40 pies de ancho, 30 de alto y 194 pies de largo (12,3 × 9,2 × 60 m), se construyó a comienzos del siglo XV. La techumbre está formada por veintiún grandes vigas de madera de roble separadas 2,80 m entre ejes, figura 1.2.

El sistema de cubierta es simple. El revestimiento de plomo está colocado directamente sobre un entablado de 25 mm de espesor, dispuesto sobre unos pares separados 700 mm entre sí. Estos pares apoyan en los muros laterales, en la hilera de la cumbrera y en unas correas intermedias que transmiten su carga, por medio de pequeños pies derechos, a las grandes vigas.

Así, de modo esquemático, se puede suponer que cada viga soporta un área de cubierta de 12,30 m × 2,80 m, y está sometida a una serie de cargas puntuales cuyo valor total es *W*, figura 1.3. El valor de *W* corresponde a la carga total que soporta una viga y, antes de continuar, conviene hacerse una idea de su magnitud. Las cargas consideradas en los cálculos son:

Peso de la madera	0,95	kN/m^2
Peso del revestimiento	0,65	
Peso propio total	1,60	
Sobrecarga (nieve)	0,75	
Peso propio más sobrecarga	2,35	kN/m^2

Por tanto, el valor de la carga *W* (peso propio más sobrecarga) es de (2,35)·(12,3)·(2,8) = 81 kN. Si la viga de la figura 1.3 estuviera realmente simplemente apoyada, entonces, el momento flector máximo tendría un valor de

$$\frac{Wl}{8} = \frac{(81)\,(12,3)}{8} = 124,5 \text{ kNm}$$

La sección transversal de las vigas es de 485 mm × 320 mm, y su correspondiente módulo resistente elástico es de 12,55 × 10^6 mm^3, con lo que la tensión debida a la flexión es de 9,9 N/mm^2. Se trata de un valor alto, en particular si se mantiene durante siglos, aunque es menor que los rangos de tensión permitidos por la normativa británica para maderas duras (British Standard 5268: Part 2: 1984).

Por supuesto, incluso en este sencillo análisis, hay ocultas algunas suposiciones convencionales. Por ejemplo, es habitual suponer que los elementos similares se comportarán de la misma manera; en concreto, una carga uniformemente distribuida se repartirá a partes iguales entre los elementos que la soportan, lo que finalmente lleva a que las cargas puntuales indicadas en la figura 1.3 tienen el mismo valor. Pero si se examina de cerca la cubierta se encuentran

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The roof of the monk's dormitory, Durham». En: *Engineering a cathedral*, ed. por M. Jackson. (Londres:Thomas Telford, 1993): 169–79, Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

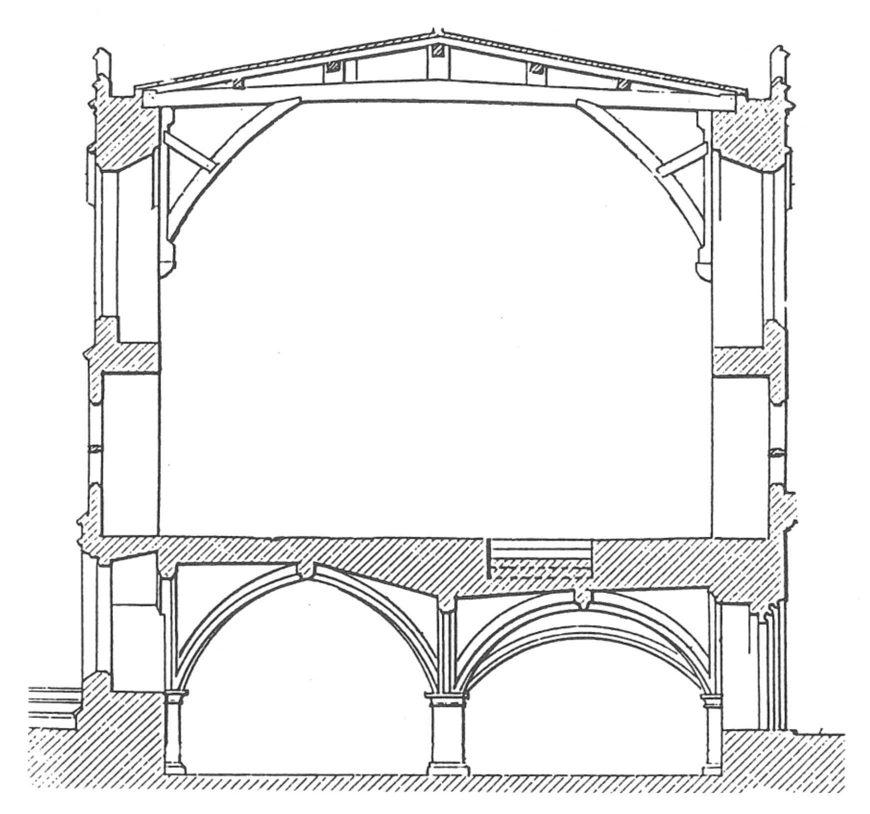


Figura 1.1
El dormitorio de los monjes

(inmediatamente ciertas anomalías. Por ejemplo, hay pares que no apoyan en alguna de las correas intermedias, de manera que las cargas no se reparten por igual en todas las correas. Pese a ello, la suposición habitual de un reparto igual de la carga es, de hecho, segura. Esta afirmación puede justificarse de forma rigurosa; en términos puramente descriptivos, si una parte de la estructura recibe más carga, cederá ligeramente, y obligará a la parte menos cargada a realizar su tarea.

Por tanto, el resultado obtenido al considerar la viga «simplemente apoyada» muestra que las 21 vigas tienen sección suficiente para soportar las cargas

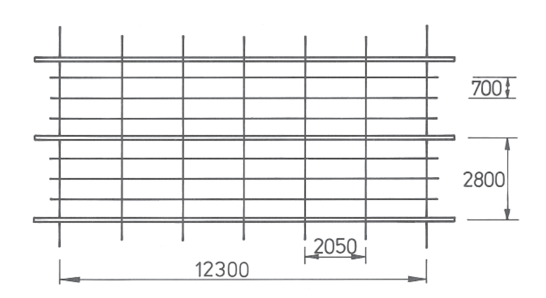


Figura 1.2
Croquis de la planta de la techumbre

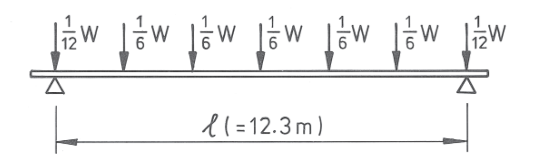


Figura 1.3
Cargas de las correas sobre las vigas del techo

requeridas. Sin embargo, la techumbre dibujada en la figura 1.1 es más compleja; los extremos de las vigas no sólo apoyan en los muros laterales, hay también unos jabalcones inclinados unos 45°. La presencia de estos jabalcones reducirá notablemente las tensiones en las vigas principales y también disminuirá las flechas.

La viga sobre cuatro apoyos

En la figura 1.4 se ha representado el efecto de los jabalcones por dos fuerzas *S*, que se añaden a las dos fuerzas *R* correspondientes a las reacciones de los muros laterales.

Comparando con la figura 1.3 se observa que se han sustituido las fuerzas puntuales (que ya estaban idealizadas) por una carga uniformemente repartida con el mismo valor total; también en este caso se trata de una simplificación habitual en el análisis de estructuras. (Más adelante se muestran las diferencias numéricas derivadas de esta simplificación. Los errores son pequeños y el momento flector «libre» (isostático) $Wl/8$ en el centro del vano es el mismo en ambos sistemas representados en las figuras 1.3 y 1.4.)

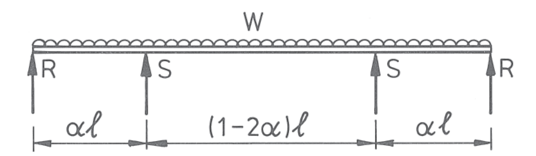


Figura 1.4
Viga sobre cuatro apoyos

El apoyo proporcionado por los jabalcones se ha representado en la figura 1.4 situado a una distancia αl desde los muros; en este artículo se va a examinar el efecto de la variación del valor de α. Es evidente que para valores de α pequeños (jabalcones más cortos que los de la figura 1.1), los extremos de las vigas se levantarán de sus apoyos en los muros exteriores y las vigas quedarían soportadas únicamente por las dos fuerzas *S* de la figura 1.4, sin que los muros ejerzan reacción alguna. Como se verá más adelante, los jabalcones están dispuestos de modo que esta situación pueda llegar a producirse, de hecho, un examen detenido de la techumbre muestra que los muros, en algunos casos, apenas soportan carga.

(a) Sin apoyo en los muros, $\alpha < 0{,}2142$

En el esquema de la figura 1.5 se ha supuesto que los extremos se han levantado de los muros; el diagrama de momentos flectores correspondiente a este caso tiene dos valores que lo definen, M_s y M_c:

$$\left.\begin{aligned} M_s &= (2\alpha)^2 \frac{Wl}{8} \\ M_c &= (1-4\alpha) \frac{Wl}{8} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

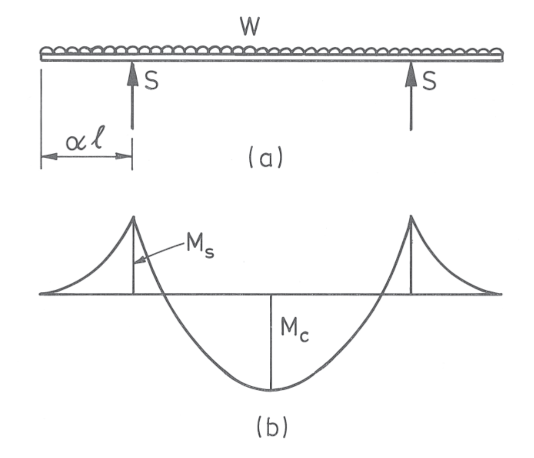


Figura 1.5
Viga sobre dos apoyos

Un problema elemental de estructuras isostáticas consiste en hallar la posición «óptima» de los apoyos *S*, esto es, encontrar el valor de α para el que los valores M_s y M_c sean idénticos. Igualando las dos expresiones (1) se obtiene que

$$4\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$$

$$\text{ó} \quad \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071 \qquad (2)$$

Para este valor de α,

$$M_s = M_c = (0{,}1716)\frac{Wl}{8} \qquad (3)$$

Como se verá, la condición para que los extremos no se levanten es $\alpha < 0{,}2142$; por encima de este valor, las reacciones R de la figura 1.4 ayudan a soportar la viga.

Se puede repetir el análisis adoptando la hipótesis, menos idealizada, de cargas puntuales iguales, representada en la figura 1.6. Únicamente se considerará el caso en que $1/6 < \alpha < 1/3$ (como se indica en la figura 1.6). Los valores principales de los momentos son en este caso,

$$\left.\begin{aligned} M_s &= \left(2\alpha - \frac{2}{9}\right)\frac{Wl}{8} \\ M_c &= (1-4\alpha)\,\frac{Wl}{8} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{11}{54} = 0{,}2037 \\ \text{y} \quad M_s &= M_c = \frac{5}{27}\,\frac{Wl}{8} = (0{,}1852)\,\frac{Wl}{8} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

compárense estos valores con los de las ecuaciones (2) y (3).

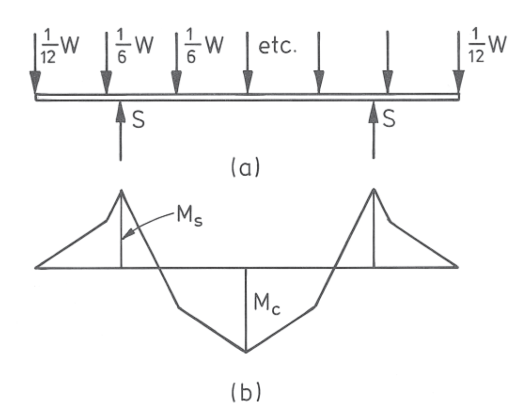


Figura 1.6
Viga con cargas puntuales

(b) Apoyo en los muros, α > 0,2142

En la figura 1.7 se representa el diagrama general de momentos flectores de la viga del techo sobre cuatro apoyos. Por supuesto, la viga presenta una redundancia (es hiperestática de primer grado); los valores R y

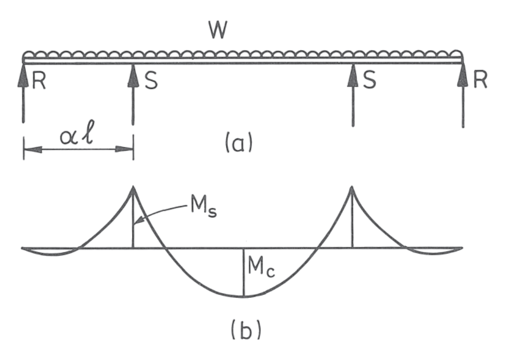


Figura 1.7
Viga sobre cuatro apoyos

S deben sumar en total ½W, pero con las simples leyes de la estática no se puede encontrar ninguna otra relación entre esas dos cantidades. Para calcular sus valores hay que hacer un uso completo de la teoría de estructuras.

En primer lugar se mostrarán los resultados de un análisis elástico convencional; nótese, no obstante, que el análisis lleva embebidas una serie de suposiciones que son dudosas. Por ejemplo, para evitar una complicación de cálculo, se ha supuesto que la sección de la viga es constante a lo largo de toda su longitud; además se ha considerado que la elasticidad básica de la madera es uniforme. Ambas suposiciones son aproximaciones bastante groseras de la techumbre de Durham.

De todos modos, al definir las condiciones de contorno para obtener la solución elástica, hay que realizar otras suposiciones más importantes y críticas; es preciso decidir sobre la forma en que pueden desplazarse los cuatro puntos de apoyo R y S en la figura 1.7. Los resultados que se muestran a continuación se han obtenido suponiendo que todos los apoyos son rígidos (o, más exactamente, que se encuentran al mismo nivel), a pesar de que cualquier asiento diferencial supondría una variación importante en la distribución de momentos flectores a lo largo de la viga. Pese a todo, no es posible realizar otra hipótesis ya que las condiciones de apoyo son, en esencia, imposibles de conocer, puesto que dependen de multitud de factores como la compresibilidad de los jabalcones, la contracción de las uniones entre los maderos, el grado de deterioro de los estribos o soleras donde apoyan los pares, etc.

El resultado siguiente, obtenido a partir de un análisis elástico debe, por tanto, contemplarse con cierta reserva

$$R = \frac{Wl}{4\alpha}\left[\frac{-1+6\alpha-6\alpha^2-\alpha^3}{3-4\alpha}\right]$$

$$M_s = \frac{Wl}{8}\cdot 2\left[\frac{1-6\alpha+12\alpha^2-7\alpha^3}{3-4\alpha}\right] \qquad (6)$$

$$M_c = \frac{Wl}{8}\left[\frac{1-4\alpha+4\alpha^2-2\alpha^3}{3-4\alpha}\right]$$

El valor de R tiene que ser positivo; resolviendo este sistema de ecuaciones cúbicas se obtiene $\alpha = 0{,}2142$ como condición para que el extremo de la viga se levante del muro, y los resultados de las ecuaciones (6) únicamente son válidos para valores de α mayores.

Es interesante observar que los valores de momento M_s y M_c no son iguales para ningún valor de α comprendido en el rango $0{,}2142 < \alpha < 0{,}5$. El valor de M_c disminuye a medida que α aumenta, llegando incluso a cambiar de signo, mientras que el valor de M_s alcanza su valor mínimo cuando $\alpha = 0{,}3500$, siendo

$$[M_s]_{\min} = (0{,}0873)\,\frac{Wl}{8} \qquad (7)$$

Por tanto, de acuerdo con el análisis elástico realizado, el resultado de la ecuación (7) corresponde a la

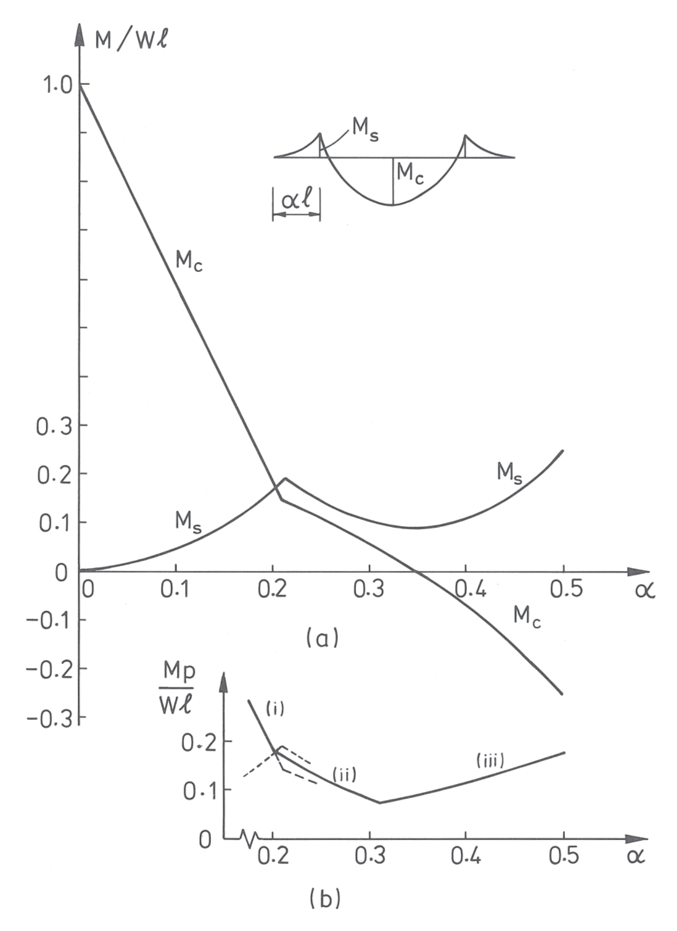


Figura 1.8
Viga sobre cuatro apoyos. (a) Soluciones «elásticas»; (b) soluciones «plásticas»

situación óptima de los jabalcones cuando se pretende que los valores de los momentos a lo largo de la viga sean lo menores posibles.

La figura 1.8(a) muestra los resultados de las ecuaciones (4) y (6), dibujando los valores de los momentos flectores en función de α. Cuando $\alpha = 0{,}2071$ los valores de M_s y M_c son iguales, como se ha indicado anteriormente en la ecuación (3), y los extremos de las vigas de la cubierta no están en contacto con los muros.

Este cálculo elemental del óptimo, es estáticamente determinado y su solución no depende, por tanto, de las dudosas suposiciones que es preciso hacer en un análisis elástico. Si se aceptan las hipótesis elásticas, los extremos de las vigas del techo estarán en contacto con los muros laterales cuando $\alpha = 0{,}2142$, y la solución elástica «óptima», ecuación (7), se obtiene para $\alpha = 0{,}3500$. En la figura 1.9 se han representado algunos diagramas de momentos flectores típicos para distintas posiciones de los apoyos.

Conviene advertir que en el intervalo $0{,}3574 < \alpha < 0{,}4264$ el valor de M_s no es el mayor momento flector de la viga. La figura 1.10 muestra el diagrama de momentos flectores del vano extremo; el valor de $[M]_{\max}$ viene dado por la expresión

$$[M]_{\max} = \frac{Wl}{8}\left[1 - \frac{2M_s}{\alpha Wl}\right]^2 \qquad (8)$$

donde el valor M_s depende de α, ecuación (6).

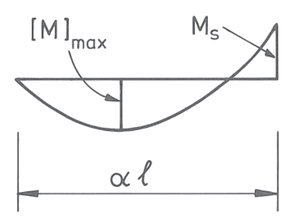


Figura 1.10
Análisis elástico

«Análisis plástico»

La madera no es un material «plástico», aunque tiene suficiente ductilidad para ser un material estructural eficaz (a diferencia del vidrio o del hierro fundido), capaz de producir redistribución de cargas.

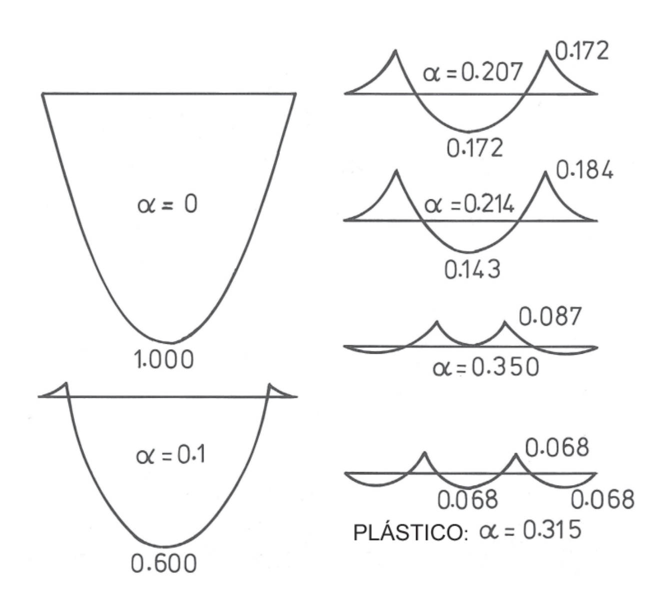


Figura 1.9
Diagramas de momentos flectores para diferentes posiciones de los jabalcones de apoyo. Valores principales de los momentos flectores × $Wl/8$

Una solución plástica del presente problema tiene al menos la misma aplicabilidad y relevancia que la solución elástica.

En la figura 1.11 se muestran los tres posibles modos de colapso de la viga del techo, dependiendo del valor de α.

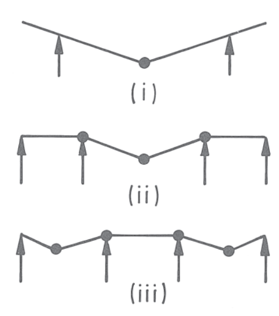


Figura 1.11
Modos de colapso plástico

Para valores de α pequeños ($\alpha < 0{,}2071$) se produce la rotura según el modo (i); se trata del caso de la viga isostática en que los extremos de la viga se levantan del muro y $M_c > M_s$. Para $\alpha > 0{,}2071$ se cambia al modo (ii) y, por último, si el valor de α sigue aumentando se produce el modo (iii). Los momentos plásticos máximos según este análisis plástico son

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} & 0 < \alpha < 0{,}2071 & M_p = (1 - 4\alpha)\,\dfrac{Wl}{8} \\ \text{(ii)} & 0{,}2071 < \alpha < 0{,}3153 & M_p = \dfrac{1}{2}(1 - 2\alpha)^2\,\dfrac{Wl}{8} \\ \text{(iii)} & 0{,}3153 < \alpha < 0{,}5 & M_p = (0{,}6863\alpha^2)\,\dfrac{Wl}{8} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Igualando las expresiones segunda y tercera se obtiene el valor $\alpha = 0{,}3153$.

Los resultados de las ecuaciones (9) para el cálculo «plástico» de la viga del techo se han representado en la figura 1.8(b) (compárense con los de la figura 1.8(a)). Para valores de $\alpha < 0{,}2071$ ambas soluciones plástica y elástica son idénticas; se trata de una viga estáticamente determinada. Para valores de $\alpha > 0{,}2071$ el cálculo plástico da siempre valores del momento plástico M_P menores que el mayor de los momentos elásticos correspondiente para el mismo valor de α. La solución plástica óptima es la que se produce entre los modos (ii) y (iii) de la figura 1.11 que corresponde al valor de $\alpha = 0{,}3153$. El valor del momento flector correspondiente es

$$[M_p]_{\min} = (0{,}0682)\,\frac{Wl}{8} \qquad (10)$$

compárese con el resultado de la ecuación (7); en la figura 1.9 se ha dibujado la gráfica correspondiente.

La techumbre del dormitorio

Resulta notable que los jabalcones de la figura 1.1 estén situados a una distancia correspondiente a un valor de α próximo a 0,21. Como se ha visto antes, si $\alpha = 0{,}2071$ los momentos en el centro del vano y en el apoyo son iguales, ecuación (3), mientras que para $\alpha = 0{,}2142$ los muros laterales comienzan a soportar las vigas de cubierta. Por tanto, los jabalcones garantizan que los estribos o soleras no reciben prácticamente carga alguna; las cargas de la techumbre se transmiten a lo largo de los jabalcones a los pilarejos sujetos a la pared. Además, el esquema estructural es estáticamente determinado para $\alpha < 0{,}2142$ con lo que las prevenciones acerca de la exactitud tanto del análisis elástico como del plástico pierden importancia.

Ya se ha indicado que la tensión máxima de la viga de la techumbre considerada simplemente apoyada en los muros (suponiendo las dimensiones indicadas anteriormente), sería de 9,9 N/mm². Los jabalcones reducen la tensión hasta el valor correspondiente al resultado de la ecuación (3), esto es 1,7 N/mm².

(Resulta interesante que, si se hubieran empleado unos jabalcones más largos, probablemente una solución más cara, que permitieran el apoyo a una distancia en torno a un tercio de la luz, entonces, la tensión mínima absoluta correspondiente a la ecuación (10), sería de 0,7 N/mm².)

Por tanto, los jabalcones están situados de tal modo que aseguran un buen proyecto; además, la magnitud de la tensión máxima, en torno a 2 N/mm², es adecuada para una estructura de madera que debe perdurar a lo largo de siglos.

2

La catedral de Gloucester: la bóveda de la cabecera del siglo XIV

La historia de la Catedral de Gloucester tiene mucho en común con la de muchas otras instituciones religiosas de Inglaterra —el templo ha sido construido y reconstruido a lo largo de los siglos. Gloucester, como su nombre indica, fue una ciudad romana, y la actual catedral fue construida sobre la esquina noroeste de la muralla romana; algunas piedras de la muralla pudieron haber sido reutilizadas en los cimientos normandos. No obstante, esto habría sucedido transcurridos 1.000 años; los romanos abandonaron Gloucester en el año 410, y la primera comunidad religiosa que allí se estableció, un monasterio, lo hizo en torno al año 680. No se sabe nada con certeza sobre los edificios, si bien algunos puede que estuvieran construidos en piedra. Aparentemente, estos edificios se encontraban en un estado ruinoso ya a finales del siglo VIII, y una nueva fundación, esta vez de clero secular, se instaló allí en el año 823. Posteriormente, en el año 1022, monjes Benedictinos se hicieron cargo de los nuevos edificios, así como de la comunidad. Aproximadamente treinta años después, el monasterio fue totalmente destruido por el fuego.

Los trabajos para la construcción de una nueva iglesia comenzaron en el año 1058, y quizá parte de esta construcción se conserve a día de hoy en la actual cripta. Sea así o no, la Conquista Normanda de 1066 trajo consigo aspiraciones diferentes y nuevos estilos: los trabajos previos se desmantelaron, a lo que ayudó un nuevo incendio ocurrido en el año 1088, y el siguiente año comenzaron los trabajos de construcción de una iglesia románica, mucho más grande que cualquiera de sus predecesoras. La iglesia fue consagrada en el año 1100, si bien su construcción no finalizó hasta 1126. En su estado final, la iglesia normanda tenía una torre central con transeptos, una cabecera de tres tramos rematada en forma de ábside, y una nave de nueve tramos, cerrada por la fachada occidental (que tenía dos torres que no se conservan). Es probable que la cabecera estuviera cubierta por una bóveda de cañón de fábrica, y que las naves laterales estuvieran también abovedadas. La nave central tenía una techumbre de madera.

Hubo de nuevo incendios en los años 1101, 1122, 1179 y 1190, y los monjes decidieron finalmente abovedar la nave central para evitar los constantes daños causados por el fuego. La techumbre de madera fue sustituida por la actual bóveda nervada cuatripartita (con una nueva techumbre de madera sobre ella para protegerla de las inclemencias del tiempo). Estos trabajos finalizaron en el año 1242.

Un siglo después, la atención se centró sobre el resto de la iglesia. Entre 1331–36, el transepto sur fue remodelado, revistiendo la fábrica normanda de nueva sillería y construyendo una nueva bóveda de ligaduras en piedra. De forma análoga se remodeló el transepto norte entre 1368–73. Durante los años transcurridos entre los trabajos en ambos transeptos,

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Gloucester cathedral: the fourteenth-century choir vault,» *Palladio* 7 (1994): 97–100. Traducción de Alejandra Albuerne Rodríguez.

aproximadamente en el periodo 1337–57, se remodeló la cabecera. Las arcadas normandas de la cabecera y triforio quedaron también revestidas con nueva piedra en estilo perpendicular. Se añadió además un nuevo cuerpo de luces de mayor altura que los otros tres brazos de la catedral. El ábside normando fue suprimido y en su lugar se levantó un remate cuadrado, en el que se abrió un gran ventanal al este. Finalmente, la nueva bóveda de la cabecera, de enorme complejidad, se prolongó como un elemento continuo a lo largo del crucero, de tal forma que hoy en día no es posible apreciar la torre desde el interior del templo.

Es probable que la torre normanda no fuera muy alta al concluir su construcción en el año 1089. Posiblemente una o dos plantas fueron añadidas en 1222. La torre actual, remodelada al menos en sus plantas superiores, data de 1450. La figura 2.1 muestra un grabado del siglo XIX (Britton 1836) que muestra la torre desde el suroeste.

Las fechas que se han dado anteriormente son las mejores que están disponibles en la literatura sobre la catedral; se han reproducido sobre la planta esquemática del crucero, figura 2.2.

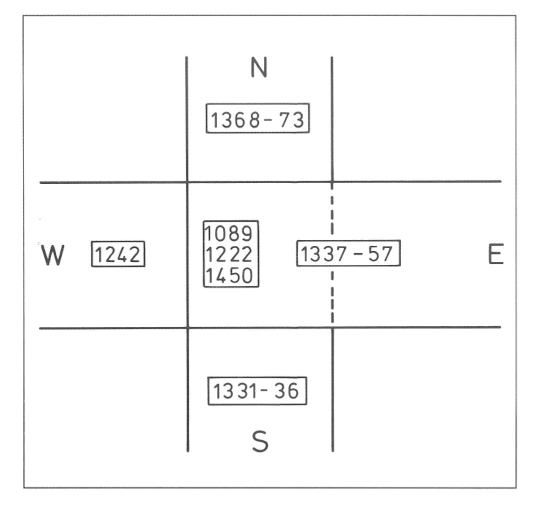


Figura 2.2
Fechas de construcción del crucero



Figura 2.1
Catedral de Gloucester: torre y transepto sur (Britton 1836)

La sección longitudinal (James Basire 1807) de la catedral (mirando hacia el norte) que se ha reproducido en la figura 2.3 muestra, a la izquierda, la bóveda de la nave remodelada en 1242, y, a la derecha, la bóveda de la cabecera remodelada entre 1337–57. Dos tramos de la bóveda de la cabecera se sitúan en el crucero, y los conoides centrales de las bóvedas, que descienden justo por debajo de la clave de los arcos que se abren hacia los transeptos, se apoyan sobre elegantes arcos volantes exentos que discurren de este a oeste entre los pilares del crucero.

Este artículo trata sobre algunos de los rastros dejados por esta reconstrucción que pueden observarse en la fábrica actual de la iglesia.

La torre normanda sobre el crucero

Se puede deducir que la torre original (1089) se levantaba aproximadamente hasta el nivel A que se muestra en la figura 2.3. Esta altura es más o menos la de las torretas de los transeptos (figura 2.1); estas torretas, si bien han sido remodeladas, contienen fábrica del siglo XI. Por lo tanto, una torre de este tamaño

habría sido suficientemente alta para recibir las cubiertas originales de los cuatro brazos de la iglesia. Como se puede observar, los actuales contrafuertes de las esquinas de la torre presentan un retranqueo en este nivel A.

Es posible que la mayor parte de la construcción normanda sobreviva; como se verá, no parece haber motivos técnicos para su supresión. En el exterior, la fábrica original situada por debajo del nivel A probablemente se encuentre detrás del aplacado del siglo XV. Análogamente, la cara interior del muro norte del crucero ha sido parcialmente revestida (y posiblemente labrada en parte in situ) en el estilo del siglo XV.

La altura de los arcos interiores ha sido aumentada. No obstante, examinando el moldurado normando original del arco de la nave y de los dos arcos del transepto, parece que en estos tres arcos la altura se aumentó muy poco, convirtiendo su forma semicircular original en un perfil apuntado gótico. Por el contrario, la altura del arco entre el crucero y la cabecera se aumentó considerablemente con el fin de encajar con la gran altura de la nueva obra. El problema estructural que se plantea, que será tratado en el apartado final de este artículo, es cómo se puede aumentar la altura y la forma de un arco portante, mientras continúa soportando la totalidad de las cargas impuestas por la torre que sobre él se levanta.

En la cara oeste de la torre surge un problema parecido. La nueva bóveda continua de la cabecera anula la función de la torre como linterna sobre el crucero, por lo que se abre una nueva ventana inmediatamente por debajo de la bóveda que permite la entrada de luz al centro de la iglesia. Esta ventana puede verse detrás de la baja cubierta de madera sobre la nave, figura 2.3). Una vez más, ¿cómo pudo introducirse esta ventana?

Antes de discutir este problema, nos detendremos sobre una curiosidad acerca de la bóveda del siglo XIII que cubre la nave.

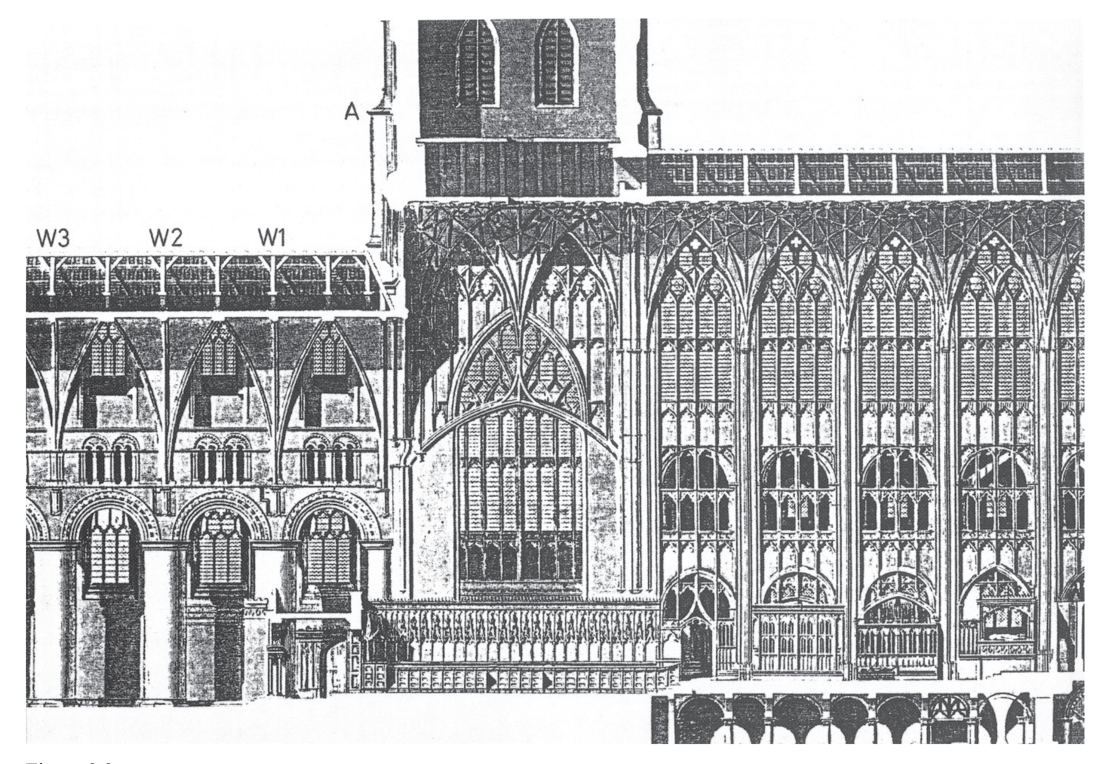


Figura 2.3
Sección longitudinal parcial mirando hacia el norte (Basire 1807)

La bóveda de la nave, 1242

El grabado de Basire, figura 2.3, no muestra las distorsiones de los tres primeros tramos situados al oeste del crucero de la bóveda de 1242. El arranque de la bóveda en el crucero se sitúa a unos 1.000 mm al oeste del eje del pilar; el arranque en el siguiente pilar en dirección oeste (W1 en el dibujo) está quizás 500 mm al oeste del eje de dicho pilar; el arranque en W2 sigue estando descentrado; y el orden no se recupera hasta el pilar W3.

Se cuenta que fueron los propios monjes quienes llevaron a cabo estos trabajos y que no contaban con los conocimientos técnicos necesarios. Es cierto que todos los autores coinciden en opinar que la bóveda de la nave no es visualmente atractiva, por cuanto los nuevos elementos se apoyan de un modo poco elegante sobre la fábrica normanda. No obstante, las distorsiones de los tres cuerpos orientales de la nave son una solución inteligente, aunque un poco burda, a un problema geométrico complejo. Los indicios hallados en la propia fábrica sugieren que el arco normando que da entrada a la nave no fue modificado, de tal forma que la nueva bóveda terminaba en la cara oeste del muro de la torre normanda, en vez de en el eje del pilar del crucero. Por lo tanto, mientras los pilares de la bóveda se encuentran espaciados de forma regular, el último cuerpo de la bóveda era aproximadamente un metro más pequeño. Tal como se ha comentado, esta reducción en el tamaño de la bóveda se disimuló repartiéndola entre tres tramos, en vez de concentrándola en uno solo.

Es probable que el arco apuntado actual, un elemento estructuralmente diferente a la bóveda de la nave, sustituyera al arco normando en el siglo XIV durante la remodelación del transepto y la cabecera.

La bóveda de la cabecera/crucero, 1337–57

Como se ha mencionado, la bóveda de la cabecera se extiende de manera continua a lo largo del crucero y para su construcción hubo de ser forzada a pasar entre los muros de la torre normanda, a una altura considerable (que se puede estimar en unos 10 m) por encima del arco del presbiterio. Por lo tanto, previo a la culminación de los trabajos de construcción de la bóveda, fue necesario demoler más de 10 m del muro este de la torre.

El modo en que este proceso fue llevado a cabo se puede apreciar sobre el trasdós de la bóveda, en el espacio debajo del forjado de la estancia desde donde se tocan las campanas. Por encima de la superficie actual de la bóveda se puede observar, figura 2.5, un arco algo tosco, con una espesor de unos 1.000 mm, embebido en el muro este de la fábrica normanda; el intradós de este arco se sitúa unos 500 mm por encima del trasdós de la bóveda. El arco de construcción burda (nunca fue pensado para quedar visto) recoge las cargas impuestas por el peso de la torre; una vez insertado, los 10 m de fábrica que quedaban por debajo se podían eliminar de forma segura. Se podía entonces construir la bóveda y el hueco de 500 mm pudo taparse empleando pequeñas piezas de piedra, labradas para encajar a la perfección.

Aunque la introducción del arco de «descarga» pudiera parecer una hazaña conceptual extraordinaria, no resulta especialmente complicada en su ejecución. La figura 2.4 ilustra de forma esquemática una

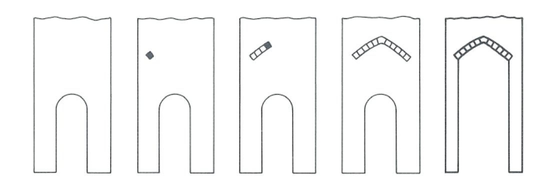


Figura 2.4
Secuencia esquemática de la construcción de un arco de descarga

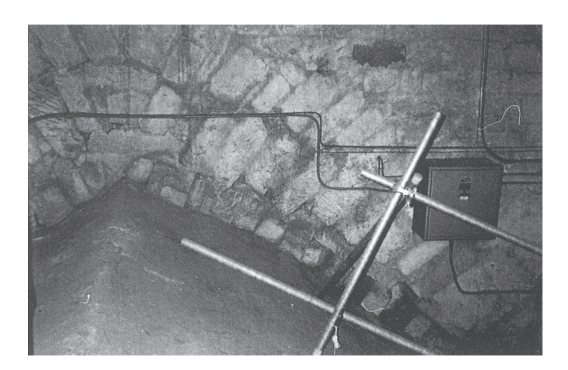


Figura 2.5
Trasdós de la bóveda de la cabecera mirando hacia el este, y el arco de descarga insertado en el muro (foto. B. Comely)

posible secuencia de las operaciones a ejecutar. Si el arco ha sido ideado como un arco de dovelas, entonces el primer paso es abrir un agujero en el muro con la forma de una dovela, insertando la dovela a continuación y retacando los huecos resultantes. La torre sería capaz de soportar la ejecución de este tipo de agujeros temporales, trabajo análogo a la inserción de pasadores en tareas de reparación. Una segundo agujero podría hacerse a continuación junto al primero, de nuevo insertando una dovela y retacando, y así sucesivamente hasta completar el arco. En ningún momento habría en la torre más de un agujero del tamaño de una dovela a través de su fábrica, y al final del proceso se obtendría un arco de descarga completo en el muro. Como se puede observar en la figura 2.5, el arco se ejecutó mediante dos roscas de toscas dovelas, cada una de unos 500 mm de espesor.

La secuencia de operaciones ilustrada en la figura 2.4 puede, por supuesto, modificarse y el autor empleó, de hecho, una secuencia ligeramente diferente al reconstruir un arco del transepto de otra iglesia tras un gran incendio. No obstante, una secuencia similar a la descrita sería eficaz y se habría empleado en Gloucester al elevar la altura de los otros tres arcos del crucero. En estos casos, sin embargo, los arcos modificados son completamente visibles, por lo que, en vez de dovelas de labra tosca, se habrían introducido las dovelas de los nervios con sus molduras bien labradas.

3
Mecánica de las escaleras de fábrica

La figura 3.1 ofrece una vista en planta de una escalera de fábrica sencilla, construida contra dos muros de la estancia en la que se encierra. Cada escalón (de los cuales 4 se muestran en el dibujo de la figura 3.2) consiste en una losa de fábrica de dimensiones $l \times b \times d$ (figura 3.3); un extremo de cada escalón está embebido en el muro, mientras que el otro está libre. Así, el escalón inferior en la figura 3.2 se apoya sobre el suelo; el borde de delante del siguiente escalón se apoya sobre el borde trasero del escalón inferior, y un extremo se apoya asimismo sobre el muro; y de igual modo ocurre para los siguientes escalones. En la práctica, los escalones pueden estar encajados unos en otros como se muestra en la figura 3.4(a); una forma de construcción habitual supone recortar la cara inferior de cada escalón, figura 3.4(b), para que la superficie inferior de la escalera sea lisa, así como para aligerar el peso total. Estos recortes son por supuesto esenciales para evitar las tensiones infinitas que se generarían, en teoría, si el contacto se produjera a lo largo de una línea; también proporcionan un margen de seguridad muy necesario frente a defectos en la escalera. El comportamiento mecánico básico de la escalera en conjunto se puede examinar tomando como referencia la representación idealizada de las figuras 3.2 y 3.3.

Sobrecargas

El problema fundamental es determinar cómo las fuerzas generadas por las cargas permanentes y las sobrecargas se transmiten a los muros y al suelo a través del sistema de la escalera. Se puede comenzar considerando el efecto de una carga puntual P colocada en el centro del último escalón en la figura 3.2 (suponiendo por el momento que la escalera concluye en dicho punto). Está claro que el equilibrio del escalón superior se podría establecer mediante las fuerzas que se muestran en la figura 3.5(a); la fuerza de $\frac{1}{2}P$ en el apoyo del lado derecho vendrá dada por el muro en el cual está embebido el escalón, mientras que la fuerza de $\frac{1}{2}P$ del lado izquierdo la proporciona el apoyo sobre el escalón directamente inferior. Se puede imaginar que, de hecho, estas fuerzas puntuales idealizadas en los apoyos serán sustituidas por algún sistema de fuerzas repartidas como se muestra en la figura 3.5(b). Cualquiera que sea la distribución, la fuerza total hacia arriba ha de tener un valor total P y, además, se deberán satisfacer otras condiciones de equilibrio de momentos.

La distribución real de las fuerzas en los apoyos es en esencia imposible de conocer. Si se conociera la geometría exacta de cada escalón, junto con sus propiedades elásticas; si la escalera hubiera sido construida de un modo perfecto, o, alternativamente,

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The mechanics of masonry stairs». En: *Structural Studies of Historical Buildings. Volume 2: Dynamics, Repairs and Restoration*, ed. por C. A. Brebbia y B. Leftheris. (Southampton: Computational Mechanics Publications, 1995): 259–65. Traducción de Alejandra Albuerne Rodríguez.

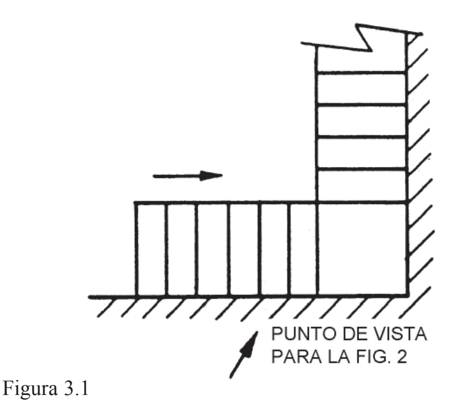


Figura 3.1

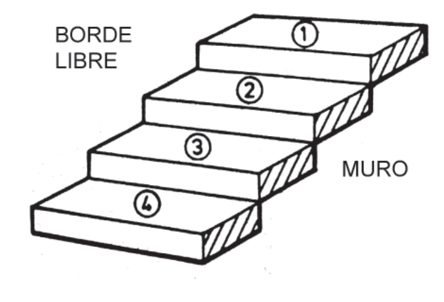


Figura 3.2

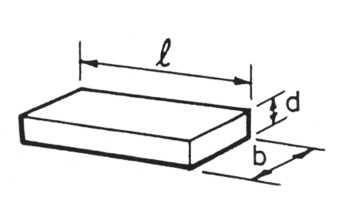


Figura 3.3

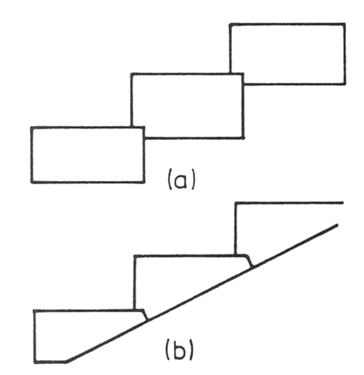


Figura 3.4

inspeccionada para encontrar su estado exacto; si la elasticidad y demás propiedades de los muros de apoyo se hubiera averiguado; en resumen, si se tuviera un conocimiento completo de la escalera, entonces, en teoría, unos cálculos laboriosos nos permitirían obtener valores para las fuerzas en la escalera. Incluso si esto fuera posible, dichos cálculos sólo serían válidos por un periodo limitado; pequeños asentamientos accidentales, por ejemplo, pueden dar lugar a cambios pronunciados en los sistemas de fuerzas internas. Todo esto es bien conocido por los analistas de estructuras (aunque en ocasiones quede escondido a la vista tras programas de cálculo por ordenador), y da lugar a la adopción de sistemas de equilibrio simples como el que se muestra en la figura 3.5(a). Este tipo de sistemas, que incluyen fuerzas puntuales, ofrecen una visión fundamental del comportamiento estructural del conjunto; siempre hay que recordar que las fuerzas puntuales se sustituirán en la práctica por algún sistema de fuerzas distribuidas, como por ejemplo el que aparece en la figura 3.5(b).

El equilibrio del escalón superior se puede obtener, por lo tanto, mediante las fuerzas mostradas en la figura 3.5(a). El resto de la escalera experimentará por lo tanto una carga de ½*P* como se muestra en la figura

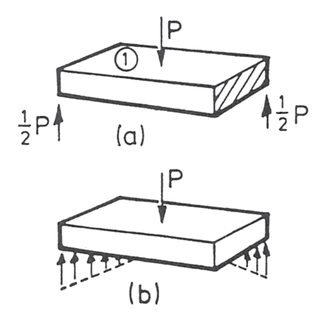


Figura 3.5

3.6. Para establecer un sistema de equilibrio plausible para el segundo escalón, resulta útil considerar un movimiento muy pequeño de dicho escalón. Si, por ejemplo, el extremo apoyado del escalón (sombreado en la figura) estuviera algo suelto dentro de la pared, entonces se puede imaginar que el escalón 2 rotaría ligeramente en torno a la línea de apoyo sobre el escalón 3, de tal forma que el borde AB descendería ligeramente bajo la acción de la carga ½*P*. La rotación se vería limitada por el hecho de que la esquina inferior B' entraría en contacto el muro, de tal modo que una fuerza de apoyo vertical se generaría en el punto B'.

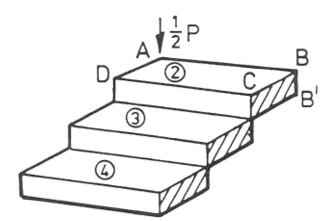


Figura 3.6

Tales ideas de deformación no requieren ser estudiadas analíticamente, pero dan paso de manera inmediata a la noción (esencialmente correcta) de que cada escalón podría ser mantenido en equilibrio por fuerzas actuando en sus cuatro esquinas A, B, C y D. Dicho sistema es isostático; las fuerzas actuando en las esquinas B, C y D para soportar la carga de ½*P* sobre A pueden calcularse directamente, y se muestran en la figura 3.7. Se observará que en el extremo empotrado del escalón 2 se generarán fuerzas verticales ascendentes y descendentes de valor ½*P*; correspondientemente, el extremo libre del escalón 2 se apoya sobre una fuerza ½*P* proporcionada por el escalón 3. El escalón está intentando girar en el muro, lo cual es impedido por el momento torsor generado por las dos fuerzas ½*P* ascendente y descendente. (Las consecuencias de este momento torsor se estudiarán más adelante.) Hay que enfatizar que los escalones en la realidad no están sueltos en su apoyo en el muro, y que las tensiones son pequeñas, de tal forma que el conjunto de la escalera es virtualmente rígido; de todas maneras, la tendencia a girar está presente, y los momentos torsores se producirán realmente.

Ya se ha visto que el escalón 3 proporciona apoyo al escalón 2. El escalón 3 recibe a su vez una carga

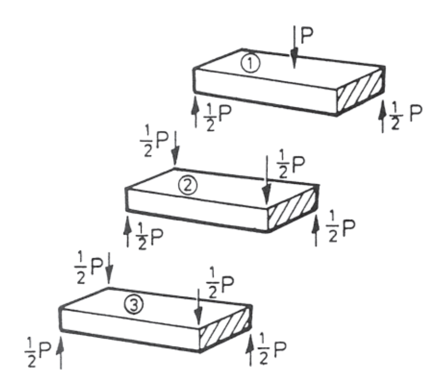


Figura 3.7

de ½*P* sobre su extremo libre. El análisis de equilibrio del escalón 3 es idéntico al análisis del escalón 2, y lo mismo ocurre para el escalón 4; la carga *P* colocada sobre el escalón superior se transmite, según este análisis sencillo, por una carga de ½*P* transmitida de escalón a escalón sobre sus extremos libres, de tal forma que cada escalón queda sometido a un momento torsor al intentar girar en el muro. Se puede imaginar que los esfuerzos se desvanecerán al ir bajando la escalera; cada escalón se ha considerado como un elemento con un apoyo simple sobre el muro, pero el empotramiento existente permitirá el desarrollo de cierto comportamiento a flexión, de tal manera que los escalones podrán trabajar, en cierta medida, como ménsulas. Dicho comportamiento como ménsulas será limitado, y este análisis simple muestra que la flexión no es necesaria para la estabilidad del conjunto de la escalera.

Se puede ver que cada peldaño de la escalera en la figura 3.7 estará sometido a un momento torsor puro de valor:

$$T = \frac{1}{2} Pb \qquad (1)$$

donde *b* es el ancho del escalón (figura 3.3).

Sobrecargas en el borde de la escalera

Si la sobrecarga *P* se sitúa sobre el extremo libre en vez de sobre el centro del escalón, el esfuerzo transmitido de escalón a escalón tendrá un valor *P*, en vez de ½*P* como aparecía en la figura 3.7. Por lo tanto, el

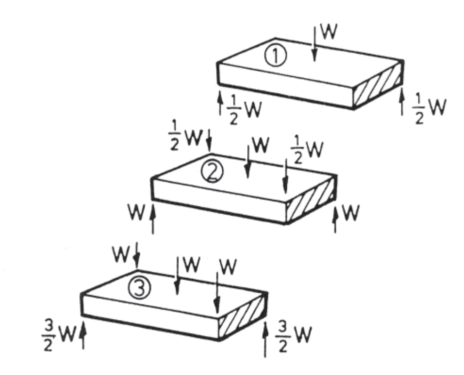
momento torsor resultante en cada escalón tendría un valor igual al doble del que ofrece la ecuación (1).

Peso propio

Los esfuerzos generados por el peso propio de la escalera se pueden calcular inmediatamente según el análisis anterior. Se ha dibujado la escalera en la figura 3.8, donde el peso de cada escalón es W (mostrado por conveniencia como una carga puntual). Las cargas sobre el escalón 2 son meramente las cargas que aparecen en los escalones 1 y 2 de la figura 3.7 superpuestas, y de igual modo ocurrirá con los sucesivos escalones al descender por la escalera, hasta el escalón general n. El análisis de este escalón general, figura 3.9, muestra que la acción estructural en el centro del escalón se puede representar por un momento torsor T y un momento flector M, donde

$$\left.\begin{aligned} T &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) W \frac{b}{2} \\ M &= \frac{Wl}{8} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Por lo tanto, el momento torsor en un escalón crece al ir descendiendo por la escalera, mientras que cada escalón está sometido al mismo (pequeño) momento flector M (como si fuera una viga biapoyada).



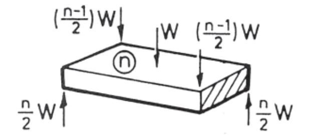


Figura 3.8

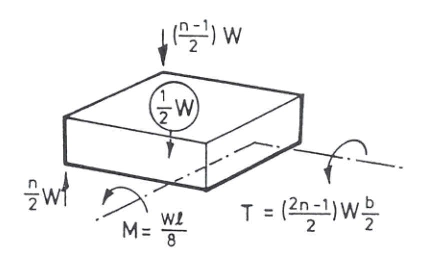


Figura 3.9

Descansillo

La figura 3.1 muestra un descansillo de cuarto de vuelta. En la figura 3.10 aparece dibujado este descansillo junto con los escalones inmediatamente superior e inferior; una sobrecarga P se transmite por el tramo superior de escalera. La esquina exterior del descansillo de cuarto de vuelta está sometida a una carga puntual ½P; en la práctica, el descansillo sólo tiene que aguantar su propio peso, y por lo demás funciona como un «poste» para transmitir directamente las cargas procedentes del tramo superior de la escalera al tramo inferior.

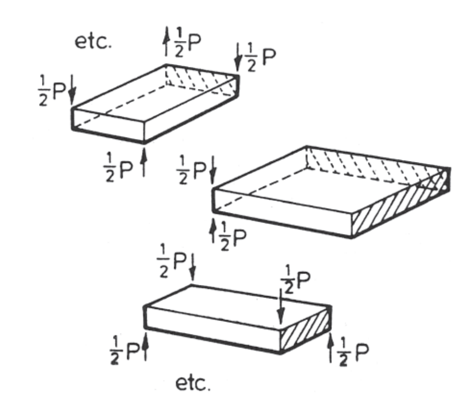


Figura 3.10

La escalera de ojo volada

En la figura 3.11 se muestra en planta una escalera construida en una estancia circular; en la figura 3.12 se muestra un escalón idealizado. El comportamiento

mecánico de tales escaleras deriva de forma directa del análisis arriba expuesto. Por ejemplo, la figura 3.13 muestra el escalón superior sometido a una sobrecarga *P* (cf. figura 3.7); la carga de ½*P* se transmite de escalón a escalón por los extremos libres, como ocurría en el caso anterior. No obstante, debido al ensanchamiento del escalón al aproximarnos al muro, el momento torsor originado en el muro se ve reducido por un factor β, quedando β definido en la planta que se muestra en la figura 3.11.

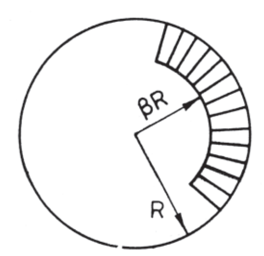


Figura 3.11

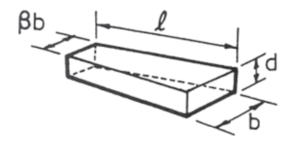


Figura 3.12

El valor de ½*P* depende, por supuesto, de la posición exacta de la sobrecarga. Al considerar las cargas permanentes (cf. figura 3.8), los pesos *W* de cada escalón actuarán sobre el centro de gravedad del escalón en vez de sobre su centro geométrico, de tal forma que el valor de ½*W* transmitido por sucesivos escalones será en realidad algo menor. De cualquier forma, la diferencia es pequeña y las expresiones de las ecuaciones (2) ofrecerán una buena indicación de las magnitudes de las fuerzas estructurales (con el valor del momento torsor *T* reducido convenientemente por el factor β).

En la figura 3.11 se puede apreciar que para $\beta = 0$ la escalera se convierte en una escalera de caracol con un poste central; de acuerdo con la figura 3.13, las cargas bajan por el poste sin que se produzcan momentos torsores en los escalones.

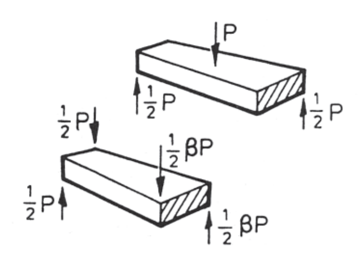


Figura 3.13

Algunos cálculos de tensiones

Un momento flector *M* actuando sobre un elemento estructural de sección $b \times d$ (figura 3.3) originará una tensión por flexión máxima de

$$\alpha = \frac{6M}{bd^2} \qquad (3)$$

Timoshenko (1934) trata la torsión de una sección rectangular causada por un momento torsor *T*, y aporta la expresión de la máxima tensión tangencial

$$\tau = \frac{1}{k_2}\frac{T}{bd^2} \qquad (4)$$

La constante numérica k_2 es una función de la relación b/d y Timoshenko tabula sus valores.

Para los cálculos numéricos, las dimensiones $l \times b \times d$ de cada escalón se tomarán como 1.000 × 300 × 150. La sobrecarga *P* se tomará como 800 N (correspondiente a la masa de un hombre de 80 kg); este mismo valor corresponde aproximadamente al peso de un escalón, y se tomará como el valor de *W*.

Así, de las ecuaciones (2) obtendremos un valor del momento flector de 100 Nm, y la ecuación (3) nos da entonces un valor de tensión por flexión de 0,09 N/mm², que es un valor despreciable.

De la primera ecuación de las ecuaciones (2), el valor del momento torsor *T* es esencialmente ½*Wb* en cada escalón (para un tramo de *n* escalones, el momento torsor en el escalón más bajo es $(n - ½)$ veces este valor). Para el momento torsor básico ½*Wb*, la ecuación (4) nos permite hallar la tensión:

$$\tau = \frac{1}{2k_2}\frac{W}{d^2} \qquad (5)$$

y para $b/d = 2$, Timoshenko da $k_2 = 0{,}246$. Por lo tanto, para $W = 800$ N y $d = 150$ mm, la ecuación (5) da una tensión tangencial por escalón de 0,0723 N/mm^2. Así, la tensión tangencial en la parte más baja de un tramo de 20 escalones será 19,5 veces este valor, es decir, 1,4 N/mm^2.

Una gran escalera de ojo volada con 100 escalones con, por ejemplo, $\beta = 2/3$, presentaría una tensión tangencial máxima de 4,8 N/mm^2. La tensión tangencial en un plano producirá tensiones de tracción en otro plano, y tensiones de tracción del orden de 5 N/mm^2 son elevadas en el caso de la fábrica.

Conclusiones

Es probable que, en la práctica, una escalera transmita entre los escalones esfuerzos tanto verticales, como se indica en la figura 3.7, como horizontales si los escalones están recortados para encajar unos con otros. No obstante, es difícil imaginar que cada escalón estará libre de momentos torsores; por lo tanto, las tensiones tangenciales, y las correspondientes tensiones de tracción, estarán presentes en la piedra. Tramos de tamaño modesto, no obstante, no se verán afectados por niveles de tensión excesivamente elevados, debidos a las cargas permanentes o a las sobrecargas. Los escalones en tramos rectos y en escaleras de ojo voladas, considerados individualmente, se comportan de manera muy similar. Los descansillos de cuarto de vuelta (o de ida y vuelta) intercalados en tramos rectos no presentan problemas particulares.

Existe la posibilidad, para tramos muy largos de escalera, de que el peso propio total dé lugar a grandes momentos de torsión en los escalones inferiores. Si, además, uno de cada dos escalones soporta el peso de una persona en su centro, entonces las tensiones causadas por las cargas permanentes se verán incrementados puede que en un 50 por ciento; si todas las personas sobre la escalera se movieran hacia el lado libre, las tensiones causadas por las cargas permanentes podrían verse duplicadas. Estas tensiones son esencialmente de tracción, y pueden dar lugar a fracturas en los escalones de piedra a niveles tensionales mucho menores de lo que corresponde a la resistencia a compresión del material.

4

La paradoja de Hambly: por qué los cálculos no reflejan el comportamiento real de las estructuras

La paradoja

Edmund Hambly, que falleció en 1995 ocupando el cargo de Presidente de la Institution of Civil Engineers británica, solía proponer un sencillo problema a una clase que estuviera estudiando la teoría de estructuras. El problema, redactado de manera algo diferente, es el siguiente:

> Un hombre que pesa 600 N se sienta en un taburete de tres patas. ¿Para qué fuerza (incorporando los coeficientes de seguridad apropiados) habría que calcular cada una de las patas? (figura 4.1).

El problema no tiene trampa —el taburete se supone simétrico, el hombre se sienta en el centro del asiento, y así sucesivamente. La respuesta es, por supuesto, que cada pata debe calcularse para aguantar una fuerza de 200 N. La siguiente pregunta es la que sí tiene truco.

> El mismo hombre se sienta esta vez sobre un taburete cuadrado con cuatro patas, una en cada esquina, y nuevamente el taburete y las cargas son simétricos. ¿Para qué fuerza se debe calcular cada una de las patas del taburete?

La respuesta de 150 N es errónea, y esta es la idea que Hambly quería hacer entender. Un taburete robusto y casi-rígido, apoyado sobre un suelo firme, casi-rígido, cojeará; tres de las patas estarán en contacto con el suelo, soportando el peso del hombre, mientras la cuarta pata no tocará el suelo. Con que esta cuarta pata se separe del suelo únicamente una fracción de milímetro, está claro que no transmitirá ninguna fuerza. Mediante cálculos estáticos sencillos (como se verá más adelante), la fuerza en la pata diagonalmente opuesta es también cero, incluso si esta pata parece estar en contacto con el suelo. El peso del hombre se reparte de forma simétrica entre las otras dos patas del taburete, y cada una de ellas debe calcularse para aguantar una carga de 300 N.

Ahora se puede imaginar el taburete colocado arbitrariamente sobre un suelo aleatoriamente rugoso. Como no hay forma de decidir cuál de las patas no estará en contacto con el suelo, todas ellas deberán ser calculadas para soportar una carga de 300 N. Existe, por lo tanto, una paradoja aparente en el problema del taburete de Hambly —añadir una cuarta pata a un taburete de tres patas aumenta la carga para la que se debe calcular cada pata, en vez de disminuirla. Esta paradoja proporciona material para una discusión sobre el proceso de cálculo estructural.

El proceso de proyecto

Existen dos fases en el análisis o cálculo estructural. La primera fase consiste en encontrar los valores de

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Hambly's paradox: why design calculations do not reflect real behaviour,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Civil Engineering* 114 (1996): 161–166. Traducción de Alejandra Albuerne Rodríguez.

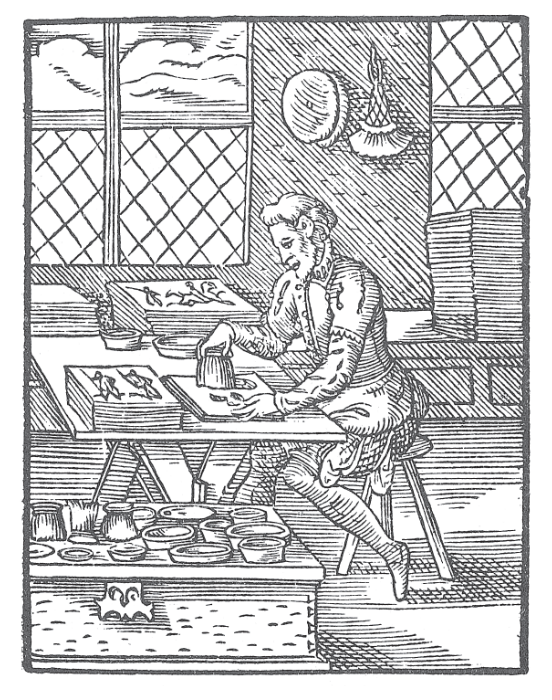


Figura 4.1
Un hombre sentado sobre un taburete de tres patas, una de las pocas situaciones que un ingeniero puede analizar con certeza («El iluminador», Jost Amman, 1568)

las fuerzas externas que actúan sobre la estructura (incluyendo entre dichas fuerzas las reacciones ejercidas por los elementos exteriores en respuesta a las cargas) junto con los valores de las resultantes de tensiones internas, tales como momentos flectores, fuerzas normales, etc. Por lo tanto, el peso del hombre provoca reacciones desde el suelo sobre las patas del taburete, y los valores de estas reacciones deben ser calculados. En el problema de Hambly, las fuerzas en las patas del taburete son las resultantes de tensiones internas y, por supuesto, en esta estructura tan sencilla son iguales a las reacciones del suelo.

Si tanto las reacciones exteriores como las resultantes de tensiones internas pueden ser halladas empleando únicamente las ecuaciones de la estática, entonces la estructura es, por definición, estáticamente determinada (isostática). Para el caso del taburete de tres patas (y suponiendo que no tiene por qué haber simetría de cargas) se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio global —resolución vertical de las fuerzas, y de los momentos en torno a dos ejes horizontales. Estas tres ecuaciones bastan para determinar las tres reacciones en los apoyos, y por lo tanto los valores de las tres fuerzas en las patas.

El taburete de cuatro patas está estáticamente indeterminado, es hiperestático; se pueden escribir únicamente las mismas tres ecuaciones, mientras que hay cuatro reacciones que hallar. Si estas reacciones son R_1, R_2, R_3 y R_4 y el hombre se sienta centrado en el taburete, pero no se realiza ninguna suposición acerca de una posible simetría en los valores de las reacciones, se sabrá como mínimo que la suma de las reacciones es 600 N. Las restantes dos ecuaciones obtenidas tomando momentos demuestran que las patas diagonalmente opuestas tienen las mismas cargas, es decir, $R_1 = R_2$ y $R_3 = R_4$. Por lo tanto, $R_1 + R_2 = 300$, pero no se puede obtener más información a partir de las ecuaciones de equilibrio. No obstante, el problema físico requiere que tanto R_1 como R_2 sean positivos, por lo que $0 \leq R_1, R_2 \leq 300$.

Debe hacerse hincapié en el hecho de que la afirmación de que sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio global para el análisis del taburete resulta de una simplificación preliminar en la modelización del problema. Por ejemplo, el proyectista habrá supuesto que el contacto de las patas con el suelo es puntual —esto sucedería en el caso de que las bases de las patas fueran redondas— y que las coordenadas de los puntos de contacto son conocidas. Además, se supondrá que las reacciones del suelo en las patas son verticales —el suelo es liso. Si, por el contrario, el contacto fuera rugoso, entonces podrían actuar fuerzas horizontales en las bases de las patas; se podrían escribir más ecuaciones de equilibrio, pero el grado de indeterminación crece muy rápidamente. Estas consideraciones pueden ser importantes o no en la evaluación final de los requisitos de proyecto de una pata del taburete, pero en la práctica es probable que sean totalmente ignoradas.

Análisis elástico

Por lo tanto, las ecuaciones de la estática, que suponen únicamente una parte de la teoría de estructuras, determinarán las fuerzas externas y las resultantes de tensiones internas en una estructura estáticamente determinada. El ingeniero puede entonces embarcarse

en la segunda fase del proyecto o cálculo estructural —las resultantes de tensiones internas deben dar lugar a niveles de tensión aceptables. El problema de hallar las tensiones en un elemento estructural correspondientes a valores conocidos de las resultantes de tensiones internas cae en el campo de la resistencia de materiales; por ejemplo, una vez conocidos los valores del momento flector y la fuerza cortante en una viga o pórtico se podrán calcular las tensiones.

La teoría de estructuras propiamente dicha se ocupa de resolver estructuras para las cuales las ecuaciones estáticas en solitario no aportan suficiente información. Deben hacerse otras dos afirmaciones antes de que se pueda obtener una solución —se debe decir algo sobre las propiedades del material de la estructura, y se deben imponer algunas condiciones geométricas. El material se puede suponer elástico lineal, por ejemplo, en cuyo caso se obtendrá una «solución elástica».

Las afirmaciones geométricas se denominan, en ocasiones, condiciones de compatibilidad. Si los elementos estructurales se analizan individualmente, entonces las deformaciones de los elementos han de ser compatibles —los elementos deben encajar unos con otros de un modo determinado. Más importante aún, se deben hacer afirmaciones sobre la manera en que la estructura está conectada a sus cimentaciones.

Toda esta información obtenida de las ecuaciones de la estática, las propiedades del material y las afirmaciones geométricas (incluyendo las «condiciones de contorno»), debe usarse para resolver el problema estructural principal: hallar los valores de las resultantes de tensiones internas. Puesto que, tradicionalmente, el material se ha considerado elástico en la segunda fase, la del cálculo de las tensiones, todo el proceso lleva a un cálculo elástico convencional.

En la práctica, el problema elástico del taburete de cuatro patas es de hecho bastante difícil. Si no hay simetría en las cargas (el hombre no se sienta en el centro del taburete), entonces, como ya se ha dicho, las ecuaciones estáticas aportan únicamente tres ecuaciones para los valores de las cuatro reacciones en las patas —el problema tiene un único grado de indeterminación. Para avanzar, se debe incluir información elástica, es decir, se debe definir la flexibilidad del asiento del taburete, así como la compresibilidad axial de las patas. La flexión de una losa (cuadrada) apoyada en sus cuatro esquinas no es un problema sencillo; afortunadamente, existen programas de elementos finitos y el proyectista puede dejar los cálculos en manos de un ordenador.

Todo esto le parecerá innecesariamente complicado a un ingeniero con experiencia que esté acostumbrado a usar destreza y juicio para realizar aproximaciones que le permitan obtener soluciones más simples sin que ello signifique que sean menos válidas. En el caso del taburete, por ejemplo, el proyectista puede perfectamente decidir (de manera correcta) que la losa que forma el asiento del taburete es virtualmente rígida, pudiendo así prescindir de la parte del modelo de elementos finitos correspondiente a esta parte. Igualmente, el proyectista puede decidir (de nuevo de manera correcta) que las cuatro patas son esencialmente incompresibles, y que el problema puede tratarse como una estructura rígida apoyada sobre un suelo rígido.

El programa de ordenador, no obstante, no permitirá tratar así el problema —requiere que se introduzcan valores de las constantes elásticas antes de poder comenzar a analizar el problema. El proyectista mantendrá, quizás, la aproximación de la losa rígida en el asiento, pero introducirá algo de compresibilidad elástica para las patas. A continuación el ordenador imprimirá los valores de las fuerzas en las patas. El programa puede llevar a cabo un nuevo cálculo para valores diferentes de las constantes elásticas, permitiendo que el proyectista se reafirme en la validez de la hipótesis que había realizado en un primer lugar, basándose en el sentido común, de que las patas se pueden considerar rígidas. Independientemente del valor que se adopte para el módulo de elasticidad, el ordenador determina que la fuerza en cada pata es de 150 N.

El proyectista puede entonces quedarse satisfecho con la resolución del problema, si bien, como veíamos en los comentarios iniciales sobre la paradoja de Hambly, la solución obtenida es errónea. Está claro, por supuesto, dónde ha ido mal el análisis —el proyectista (y el programa de ordenador) ha supuesto tácitamente que el suelo es rígido y está nivelado, y que las patas tienen todas exactamente la misma longitud inicial, de tal forma que las cuatro tienen el mismo contacto con el suelo. Las condiciones de contorno son aparentemente tan sencillas que no se ha dedicado tiempo a definir sus características. Si se razonara sobre las condiciones de contorno, estaría inmediatamente claro que son, en esencia, desco-

nocidas y que además no es posible conocerlas. La superficie del suelo se podría quizás definir, pero el hombre colocará su taburete en una posición que es desconocida.

Si esta realidad se tiene en cuenta, se puede concluir (una vez más de forma correcta) que irregularidades triviales y accidentales en el suelo no pueden realmente tener una influencia significativa en el problema cuya solución buscamos —concretamente, las fuerzas para las que se deben calcular las patas del taburete. No obstante, si somos concienzudos, se puede repetir el cálculo en el ordenador varias veces, con una pata separada del suelo, por ejemplo, 0,01; 0,1 y 1 mm. Sólo es necesario considerar una pata; un trípode se coloca de forma precisa en un suelo rugoso y sólo la distancia de una cuarta pata al suelo puede afectar al análisis.

El resultado del ordenador discrepará profundamente del del analista basado en el sentido común: diferencias mínimas en la distancia de la pata al suelo darán grandes diferencias en los valores de las fuerzas elásticas en las patas. Este resultado inesperado y poco intuitivo en el que imperfecciones pequeñas, casi triviales, pueden dar lugar a estados del taburete aparentemente muy diferentes debería hacer ver al proyectista que la teoría elástica es la base equivocada para el análisis.[1,2] Por desgracia, puede que el proyectista no llegue nunca a plantearse esto. Si no se es consciente de que es necesario introducir unas condiciones de contorno concretas antes de calcular con el programa de ordenador, se aceptarán los valores de 150 N para cada pata sin cuestionarlos.

Análisis plástico simple

El elaborado análisis del taburete de cuatro patas fracasará una vez el proyectista se dé cuenta de que la teoría (o el programa de cálculo por ordenador) no pueden manejar condiciones de contorno que son esencialmente incognoscibles. Por otro lado, un análisis elástico «convencional» sencillo dará resultados (todas las patas a 150 N) que no coincidirán con la evidencia experimental. Si se llevan a cabo las pruebas, aplicando extensómetros en cada pata para registrar las cargas, se comprobará con una serie de ensayos que la carga en una pata cualquiera puede tener un valor comprendido entre 0 y 300 N, y que en un número considerable de ensayos el valor registrado es o bien 0 o bien 300 N. Esta situación no es en absoluto nueva ni artificial.

En los años 1930, el Steel Structures Research Committee (el Comité para la Investigación de Estructuras de Acero) llevó a cabo ensayos en edificios de pórticos de acero en fase de construcción en Londres.[3,4] Observaron que las mediciones de la tensión en el acero no tenían apenas relación con los valores elásticos predichos por los proyectistas. La conclusión fue que, en la práctica, la existencia de imperfecciones mínimas inherentes a las estructuras de ese tipo hacían que el análisis elástico fuera una herramienta errónea para su proyecto. Fueron estas observaciones las que llevaron al desarrollo del método plástico de proyecto para estructuras de acero[5,6,7] (y por consiguiente para cualquier estructura elaborada con un material dúctil).

La esencia de las palabras «plástico» y «dúctil» es que se supone un comportamiento límite estable. Para el caso sencillo y familiar de una viga de acero sometida a cargas transversales, un supuesto aumento lento de la carga provocará la formación de una rótula plástica. En esta rótula se puede producir una rotación tal que dé lugar a grandes deformaciones, pero el proceso será quasi-estático, es decir, se producirá bajo cargas constantes. La característica importante de este colapso plástico es que una gráfica de carga contra desplazamiento de la estructura, al aumentar las cargas impuestas, mostrará, tras una respuesta elástica inicial, un comportamiento final horizontal.

El hormigón armado muestra el mismo tipo de comportamiento, al menos dentro del rango de deformaciones que experimentan las estructuras usuales. De hecho, cualquier material (por ejemplo, aluminio o madera) empleado en proyectos reales presenta una ductilidad similar, al contrario que ocurre con los materiales frágiles (por ejemplo, vidrio o hierro fundido), que se resquebrajarán si son deformados en exceso, dando lugar a colapsos catastróficos.

Entonces, si se llevara a cabo un análisis plástico del taburete, sería necesario asegurarse que el fallo final de las patas será dúctil. Esto implica que las patas deberán ser «robustas» y capaces de soportar una carga de aplastamiento límite sin desarrollar un comportamiento inestable. La historia de la carga en dicho taburete se puede ahora estudiar como una carga puntual en el centro (el hombre) que crece lentamente.

Inicialmente, en general, sólo dos patas estarán sometidas a carga. Si la carga de aplastamiento de cada pata es *P*, las dos patas cederán y se comprimirán de forma estable, cuando la carga puntual alcance el valor 2*P*. La compresión de las patas plásticamente deformadas permitirá que las patas que no estaban cargadas hagan contacto firme con el suelo y la carga puntual podrá entonces aumentar por encima de 2*P*. De hecho, podrá aumentar hasta alcanzar 4*P*. En este punto final las cuatro patas estarán soportando su carga máxima y a continuación se producirá un gran desplazamiento del asiento del taburete.

El cálculo plástico del taburete para aguantar a un hombre de 600 N requeriría, por lo tanto, que el valor de *P* fuera 150 N, y ésta es la fuerza para la que se debería proyectar cada pata —por supuesto, multiplicada por un coeficiente apropiado. Quizás se debería haber dicho al comenzar que el taburete se iba a diseñar para ser usado exclusivamente por un niño, el hijo del hombre, que pesa 200 N. El hombre, que pesa 600 N, es un producto de la imaginación del proyectista que aparece en el proceso para incluir en los cálculos un coeficiente (de mayoración de la carga) de 3.

Esta solución plástica —proyectar cada pata para 150 N— se ha obtenido siguiendo una historia de carga concreta, pero otras historias de carga serían igualmente posibles. Por ejemplo, en un principio una pata puede estar mínimamente separada del suelo, de tal forma que al aplicar la carga, la pata entre en contacto con el suelo por acción del acortamiento elástico de las dos patas que llevan la carga. No obstante, si la carga continúa aumentando se producirá, en el caso simétrico, el cedimiento plástico de dos patas, y posteriormente la carga puede seguir aumentando hasta que se produzca el colapso, que ocurrirá nuevamente al alcanzar la carga el valor 4P. El cálculo plástico simple es independiente de la historia de carga, y existen potentes teoremas (los teoremas del límite superior y del límite inferior, y el teorema de la unicidad) que permiten que el estado de colapso se pueda examinar sin hacer referencia al historial de la carga.

Proyecto con elementos inestables

La paradoja de Hambly no existe para el proyectista elástico poco sofisticado, ni para el proyectista plástico sencillo —ambos coincidirán en que las patas de un taburete de cuatro patas para niños deben ser calculadas para 150 N, es decir, para soportar un hombre ficticio de 600 N (que es en realidad un niño de 200 N con un coeficiente de mayoración de la carga de 3). No obstante, el cálculo plástico, y su tranquilizador teorema de la «seguridad» (el teorema del límite inferior), únicamente es válido si los elementos estructurales (las patas) son estables. Si una pata pandeara, la gráfica carga/deformación característica para esa pata caería de golpe en vez de situarse en un valor máximo horizontal, y la pata no contará con la «ductilidad» necesaria.

Por ejemplo, el proyectista plástico sencillo, consciente del riesgo de pandeo pero confiando erróneamente en el teorema de la seguridad, podría proyectar una pata para que pandeara bajo una carga de 160 N. Si el taburete se colocara cuidadosa y exactamente sobre un suelo plano, entonces los 600 N del hombre inducirían cargas de 150 N en cada pata y todo funcionaría. En un suelo rugoso, por el contrario, al principio una pata no estará en contacto con el suelo, y el peso del hombre causará (como mínimo) el pandeo de una pata, con su consiguiente deformación permanente, provocando el colapso del taburete. Dicho de otro modo, el coeficiente de seguridad de la carga se ha reducido considerablemente, pasando de 3 a 1,6.

Estos argumentos se pueden aplicar de igual manera a un proyectista elástico poco sofisticado, que proyecta las patas contra pandeo, pero creyendo que las cargas en las patas son de 150 N. La realidad es que el análisis elástico no se puede usar debido a que las condiciones de contorno son imposibles de conocer, y el proyecto resultante podría no ser seguro; de igual modo, el cálculo plástico no es válido, y se sabe que es inseguro, si hay elementos inestables en la estructura. La pregunta de Hambly parece que no ha sido aún respondida: ¿para qué fuerza deberían haberse proyectado cada una de las pata del taburete?

La pregunta ha sido debatida, y es posible obtener una respuesta parcial, por ejemplo, en la filosofía «viga débil, pilar fuerte» para el proyecto de pórticos de varias plantas.[8] Las vigas en dichas estructuras se suponen estables (contando con la restricción del pandeo lateral), de tal forma que se puedan proyectar con una sección mínima; es decir, un cálculo plástico sería apropiado. Los pilares del pórtico de varias plantas, no obstante, se proyectan con una sección que es excesiva desde el punto de vista de la resistencia, pero que «asegura» que no ocurrirá el fallo por inestabilidad.

La palabra «asegura» es la que crea conflicto. A pesar de que el pandeo se ve afectado por la existencia de imperfecciones, por tensiones residuales, etc., si las condiciones de contorno en los extremos de un pilar son conocidas, la estabilidad puede, ciertamente, garantizarse. En caso de existir alguna duda, un pilar se puede sustituir por otro algo más grueso, y, con certeza, estable, sin que esto penalice apenas en coste o peso. No obstante, lo complejo es definir las condiciones de contorno en los extremos del pilar. Puede que ni el proyectista elástico, que confía en los resultados producidos por los programas de ordenador, ni el proyectista plástico, que aplica a los extremos del pilar momentos flectores conocidos correspondientes al colapso de las vigas, sean conscientes del problema, pero ninguno de los dos está absuelto del deber de tratar de analizar las condiciones de contorno más desfavorables (figura 4.2). Dichas condiciones no se definen en ningún procedimiento estándar de cálculo. De hecho, la búsqueda de las consecuencias de la paradoja de Hambly lleva a un terreno desconocido en gran parte. Es necesaria mucha investigación para establecer reglas de proyecto, incluso para sencillas estructuras de edificación.



Figura 4.2
Los ordenadores no absuelven a los ingenieros proyectistas de estructuras de considerar las condiciones de carga más desfavorables («Riña conyugal», Hans Sebald Beham, ca. 1535)

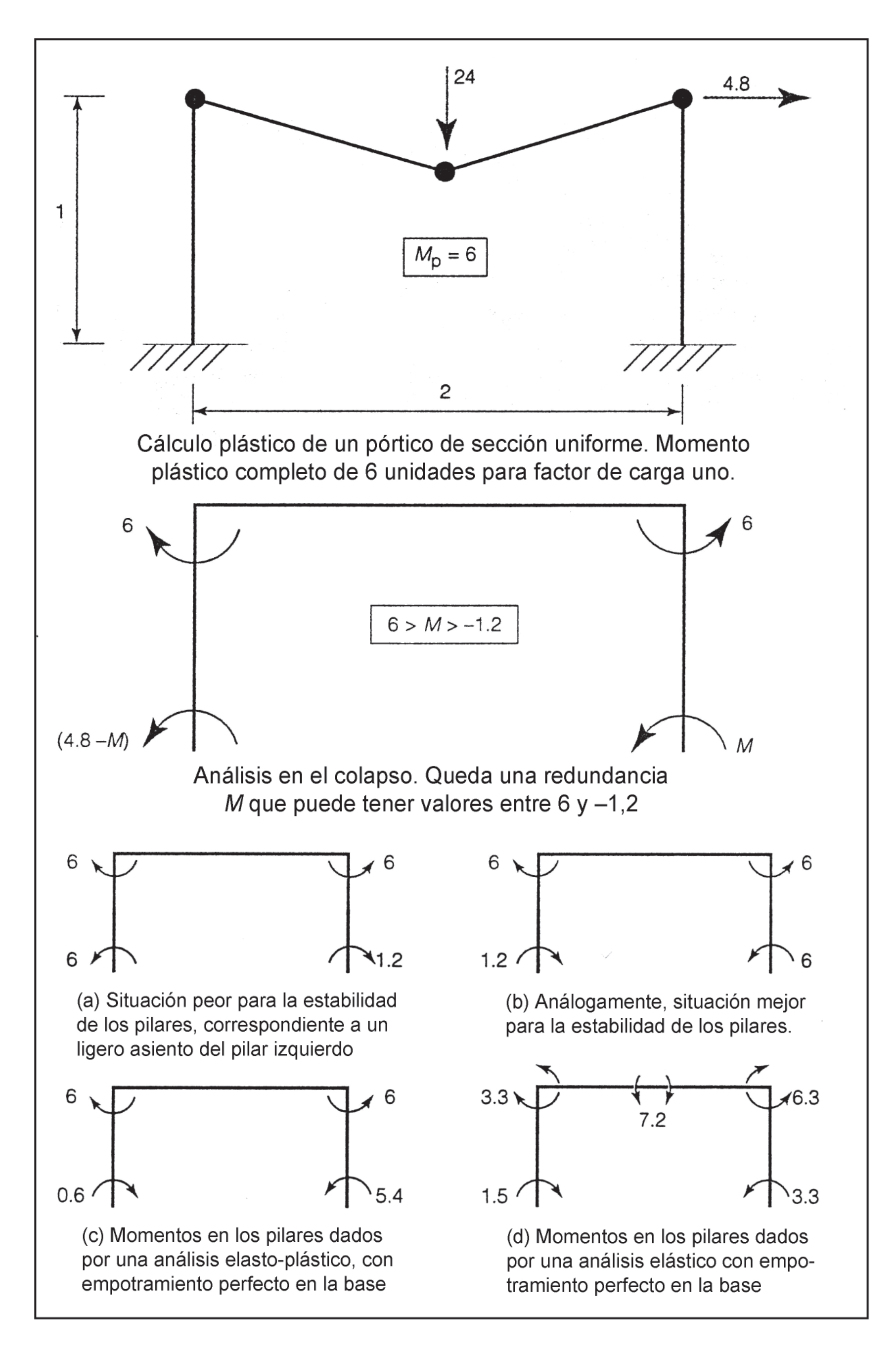


Figura 4.3
Un pequeño asiento de las zapatas (a) es más crítico a la hora de calcular los pilares de un pórtico que las condiciones (c) y (d) generadas por ordenador, que suponen un empotramiento perfecto

Podemos dar una respuesta al problema del proyecto de un taburete de cuatro patas. El taburete no será consciente del proceso mental del proyectista. Tanto si el proceso se ha basado en métodos elásticos como plásticos, el taburete estará, en algún momento de su existencia, bajo el peso de un hombre ficticio de 600 N (en realidad un niño de 200 N), en peligro de experimentar las cargas máximas de 300 N (en realidad de 100 N) en cualquiera de sus patas. Si las patas son dúctiles y estables, el proyectista podrá obtener un coeficiente de seguridad de 3 si limita la capacidad portante de cada pata a 150 N. Si esta garantía de estabilidad no se puede conseguir, entonces cada pata debe ser proyectada para que no pandee sometida a una carga de 300 N.

Conclusión

El taburete de cuatro patas de Hambly representa, por supuesto, cualquier problema general de proyecto de una estructura hiperestática. Es un hecho reconocido desde hace tiempo que, para calcular el estado «real» de una estructura sometida a la acción de determinadas cargas, deben formularse cada una de las tres afirmaciones estructurales: equilibrio, propiedades del material y deformaciones (compatibilidad y condiciones de contorno). No obstante, los cálculos no permiten obtener una descripción del estado real de la estructura. Las condiciones de contorno son, en general, desconocidas e imposibles de conocer. Una imperfección en una unión, o un pequeño asiento en una zapata, darán lugar a estados completamente diferentes al que ha sido calculado (figura 4.3). Esto no es un fallo de los cálculos, sean éstos elásticos o no, sino más bien se trata de un efecto del comportamiento de la estructura real.

Las ecuaciones de la estática son fiables, pero, en el caso de estructuras hiperestáticas, tienen un número infinito de soluciones. No hay una solución correcta para las ecuaciones, si bien una de las soluciones dará lugar al proyecto más económico en lo que se refiere a empleo de material. Aunque pudiera pasar desapercibido, ésta es la solución que busca el proyectista plástico simple, y es segura y válida siempre que no haya ninguna inestabilidad inherente en la estructura. Si, por el contrario, existen elementos susceptibles de inestabilidad (como pueden ser los pilares en un edificio), entonces la seguridad de la estructura no se puede dar por garantizada hasta que se hayan investigado las condiciones más desfavorables para estos elementos. Ninguno de los procesos de proyecto convencionales trata este problema.

5
La vibración de los pináculos de fábrica

Cuando se colocan andamios para reparar elementos estructurales esbeltos, es posible observar que se mueven; por ejemplo, es fácil hacer vibrar una aguja de fábrica o un pequeño pináculo cónico. En el presente artículo se ha obtenido de un modo aproximado el periodo fundamental de vibración de estos elementos empleando el método de Rayleigh-Ritz.

En la figura 5.1 se muestra de modo esquemático el tipo de pináculo que se va a estudiar. Supondremos que su forma es la de un cono recto, cuya sección transversal puede ser en la realidad cuadrada u octogonal. De hecho, el pináculo tendrá corchetes u otros elementos decorativos, pero los resultados del análisis de una forma cónica permiten obtener conclusiones más o menos generales. (Más adelante se estudia un perfil más complejo, figura 5.5.)

Se supondrá que las cargas que actúan sobre el pináculo son laterales, debidas a fuerzas horizontales de viento o a fuerzas de inercia provocadas por vibraciones. En el análisis no se considerarán las cargas gravitatorias permanentes debidas al peso propio del material, y se empleará la teoría convencional de la flexión simple para estudiar la «ménsula» representada en la figura 5.2. Puede verse que el cono no termina en punta; se considerará un tronco de cono de longitud l, y de espesor $2a$ en el extremo libre y $2b$ en el apoyo. Este apoyo se supondrá perfectamente empotrado, lo que permite simplificar los cálculos sin perder apenas precisión.

La razón por la que se estudia primero un tronco de cono en vez de un cono completo resulta evidente si, por ejemplo, se considera el efecto de una carga puntual W en el vértice. El espesor de la ménsula de la figura 5.2 en cualquier sección situada a una distancia x es $2(a + \gamma x/l)$, donde $\gamma = (b - a)$, de manera que el momento de inercia de la sección es

$$I_x = I_o\left(\frac{a}{b} + \frac{\gamma x}{bl}\right)^4 \tag{1}$$

en donde I_o es el valor de I_x en el empotramiento, $x = l$. La ecuación diferencial de la flexión por la acción de la carga W en el vértice es

$$EI_x \frac{d^2y}{dx^2} = Wx \tag{2}$$

por lo que, aplicando las condiciones $y=0$ y $dy/dx=0$ para $x = l$, la deformación en el extremo viene dada por

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI_o}\frac{b}{a} \tag{3}$$

Resulta evidente que cuando el valor de a tiende a cero (el pináculo se convierte en un punto), la deformación del extremo se hace infinita. Del mismo

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The vibration of masonry pinnacles». En: *Structural studies, repairs and maintenance of historical buildings*, ed. por S. Sánchez-Beitia y C. A. Brebbia. (Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997): 429–35. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

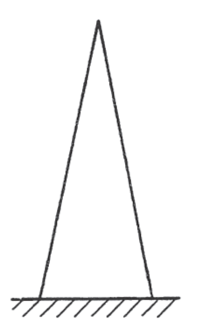


Figura 5.1
Pináculo simple

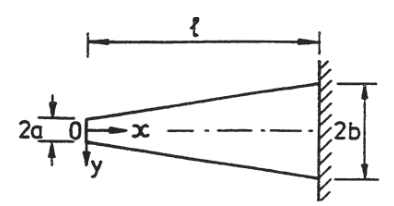


Figura 5.2
Tronco de cono en ménsula

modo, el módulo resistente de la sección correspondiente a un pináculo cónico será inversamente proporcional al cubo de la distancia x desde el vértice, mientras que el momento flector sigue estando definido por la ecuación (2); las tensiones también tienden a hacerse infinitas cuando x tiende a cero. (Esta observación se puede comparar con el hecho conocido[1] de que las coronaciones de las agujas de fábrica de las iglesias presenten con frecuencia desperfectos. También se puede comparar con el estallido de un latigazo; el extremo afilado del látigo se acelera superando la barrera del sonido.)

También es evidente que las dimensiones finitas reales cerca del extremo de un pináculo evitarán la aparición de valores infinitos en el análisis; es más, un cálculo sencillo muestra que los efectos se reducen a la zona inmediata al vértice. Por otra parte, la zona próxima a la coronación es también crítica por el carácter unilateral del material. Las fábricas resisten mal las tracciones; las cargas gravitatorias proporcionarán la fuerza de «precompresión» necesaria en torno a un metro, más o menos, por debajo del extremo, pero habrá que suponer que las últimas hiladas se encuentran (como de hecho ocurre en realidad) firmemente unidas mediante conectores metálicos capaces de resistir tracciones.

Deformación estática de un voladizo

Con el fin de introducir los métodos aproximados de estimar las frecuencias de vibración de los pináculos de fábrica, se estudiará en primer lugar la deformación estática del voladizo representado en la figura 5.2 bajo la acción de una carga en el vértice W. Si la ménsula tiene sección constante ($a=b$) y el momento de inercia es I_o, la solución directa de la ecuación de la flexión es inmediata y permite obtener la flecha en el extremo, $\delta=Wl^3/3EI_o$.

En lugar de emplear directamente la solución exacta, se puede suponer que la deformada del voladizo tiene la forma dada por una cierta función $Y = Y(x)$. Entonces, la ecuación de la energía de deformación es

$$W\delta = \int_0^l EI_x \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx \qquad (4)$$

donde $I_x=I_o$ y δ es el valor de Y para $x=0$. (El factor ½ se ha eliminado en ambos miembros de la ecuación (4)). La función Y elegida será correcta si proporciona el valor máximo de δ a partir de la ecuación (4). Supongamos, por ejemplo, que

$$Y = \delta\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \qquad (5)$$

Esta expresión parabólica de la deformación satisface la condición de que tanto Y como dY/dx son cero en el extremo empotrado $x=l$. Sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene que $\delta = Wl^3/4EI_o$.

Se puede probar también con otra expresión, suponiendo que Y tiene la forma

$$Y = \delta\left(1+\alpha\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \qquad (6)$$

que de nuevo satisface las condiciones de contorno, pero ahora con un parámetro independiente α. Sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene

$$\delta = \frac{Wl^3}{4EI_o}\left(\frac{1}{1-\alpha+\alpha^2}\right) \qquad (7)$$

La flecha δ es máxima para $\alpha = ½$ y se obtiene la solución exacta de $\delta = Wl^3/3EI_o$; la flecha de un voladizo

de sección uniforme es de hecho una función cúbica de x, y viene dada exactamente por la ecuación (6) para $\alpha = ½$.

Estos procedimientos se aplicarán al voladizo de la figura 5.3, un cono completo con $a = 0$. Bajo la acción de la carga puntual W, la solución «exacta» (calculada por integración de la ecuación diferencial ignorando la indeterminación que ocurre cuando x tiende a cero) viene dada por

$$y = \frac{Wl^3}{3EI_o}\left[\frac{3/x + 3x - 6}{2}\right] \qquad (8)$$

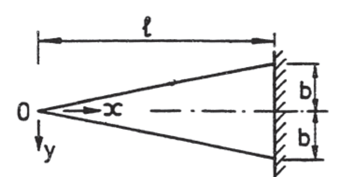


Figura 5.3
Cono en ménsula

Las soluciones aproximadas que se obtienen empleando las ecuaciones (5) y (6) para las deformadas son

$$\text{Cuadrática:} \quad y = \frac{Wl^3}{3EI_o}\frac{15}{4}\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \qquad (9)$$

$$\text{Cúbica:} \quad y = \frac{Wl^3}{3EI_o}\left(1-\frac{7}{6}\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \qquad (10)$$

Las tres expresiones, ecuaciones (8), (9) y (10), se han dibujado en la figura 5.4. Nótese que la ecuación cúbica es una buena aproximación al comportamiento real para $x/l > 0{,}2$.

Este análisis se puede repetir (no se ha hecho en este artículo) para el tronco de cono de la figura 5.2. Los desplazamientos «exactos» permanecen finitos y, como era de esperar, la expresión cúbica da valores más próximos a los exactos, incluso para valores de a/b próximos a 0,1.

Vibración de un pináculo cónico

Según Timoshenko,[2] la ecuación diferencial que describe la vibración de una viga de sección variable A_x y rigidez a flexión EI_x viene dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + A_x\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (11)$$

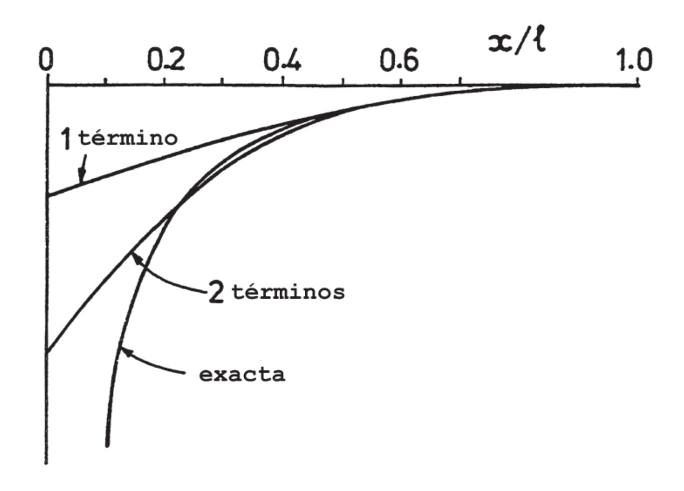


Figura 5.4
Representación gráfica de las ecuaciones (8), (9) y (10)

en la que ρ representa el peso específico del material. A menos que la sección transversal varíe de una forma particular que permita una integración sencilla, en general, no es sencillo encontrar soluciones exactas de la ecuación (11). En su lugar, se pueden emplear métodos aproximados como el de Rayleigh-Ritz, que permiten obtener la frecuencia fundamental de vibración. Se considera que la deformada de la viga es de la forma

$$y = Y \operatorname{sen} \omega t \tag{12}$$

donde la función Y da la forma de la vibración. Entonces, el máximo de los valores de la energía potencial (flexión) y cinética pueden expresarse de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_0^l EI_x \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx \\ \text{y } T &= \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l A_x \rho Y^2 dx \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Igualando estas dos expresiones se obtiene

$$\omega^2 \int_0^l A_x Y^2 dx = \frac{E}{\rho}\int_0^l I_x \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx \tag{14}$$

La expresión verdadera del modo de vibración, Y, conducirá a un valor mínimo de ω a partir de la ecuación (14).

Para el pináculo cónico de la figura 5.3 el valor de A_x viene dado por la expresión $A_o x^2/l^2$ y, como antes, $I_x = I_o x^4/l^4$. Para cualquier función Y razonable que se emplee para representar la deformación, deben cumplirse las condiciones de contorno en el extremo $x=0$, esto es, el momento flector y la fuerza cortante deben ser igual a cero:

$$\left(EI_x \frac{d^2Y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0 \text{ y } \frac{d}{dx}\left(EI_x \frac{d^2Y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0 \tag{15}$$

La función Y más sencilla que cumple las condiciones de contorno de desplazamiento en $x=l$ (pendiente y flecha iguales a cero) viene dada por la expresión parabólica de la ecuación (5). Sustituyendo en la ecuación (14) se obtiene

$$\omega^2 = (84)\left(\frac{E}{\rho}\frac{I_0}{A_0 l^4}\right) \tag{16}$$

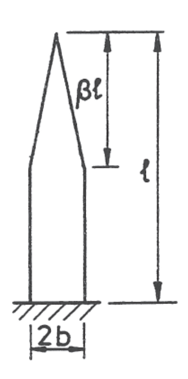


Figura 5.5
Pináculo real

Este valor de ω puede mejorarse tomando como expresión de Y la ecuación cúbica de la ecuación (6). Sustituyendo en la ecuación (14) se obtiene

$$\omega^2 = (144)\left(\frac{7+7\alpha+3\alpha^2}{12+9\alpha+2\alpha^2}\right)\left(\frac{E}{\rho}\frac{I_0}{A_0 l^4}\right) \tag{17}$$

El valor de ω alcanza su valor mínimo para $\alpha = -0{,}575$, que conduce a

$$\omega^2 = (76{,}30)\left(\frac{E}{\rho}\frac{I_0}{A_0 l^4}\right) \tag{18}$$

Se puede obtener una idea de la precisión del análisis realizado, aplicando el procedimiento a la vibración de un voladizo de sección uniforme. La función cuadrática, más sencilla, da para el coeficiente de ω^2 (84 en la ecuación 16) un valor de 20, mientras que la expresión cúbica da un valor de 12,48. El voladizo de sección uniforme puede resolverse de modo exacto (2), y el valor correcto del coeficiente de ω^2 es 12,36.

Un pináculo real

En la práctica, un pináculo puede tener la forma representada de modo esquemático en la figura 5.5, formado por un cilindro (en realidad, la sección será cuadrada u octogonal) coronado por un cono. Si se aplica el análisis simplificado de Rayleigh-Ritz empleando la expresión cuadrática para Y, ecuación (5), entonces

$$\omega^2 = 84\left(\frac{E}{\rho}\frac{I_0}{A_0 l^4}\right)\left[\frac{\beta^2(5-4\beta)}{1-(1+6\beta)(1-\beta)^6}\right] \tag{19}$$

		Modo 1 ec. (5)	Modo 2 ec. (6)	Exacto
Sección uniforme	: $\beta = 0$	0,7118	0,5622	0,559
Pináculo, figura 5.5	: $\beta = ½$	1,305	1,161	–
Cono, figura 5.1	: $\beta = 1$	1,459	1,390	–

Tabla 5.1
Valores de k, ecuación (20)

Es evidente que para $\beta = 1$ (el caso de un pináculo con forma de cono completo) se obtiene la solución de la ecuación (16); para $\beta = 0$ (un pináculo de sección constante), el término entre corchetes de la expresión (19) tiene el valor 5/21, y se vuelve a obtener el coeficiente 20 para ω^2. Para $\beta = ½$, el coeficiente para ω^2 es 67,2.

La forma cúbica de Y, ecuación (6), conduce a laboriosas expresiones algebraicas aunque las integrales son sencillas. Para $\beta = ½$, el valor mínimo de ω se obtiene para $\alpha = 1{,}042$, y el coeficiente de ω^2 es 53,24.

La frecuencia de vibración vale $\omega/2\pi$, y puede expresarse como

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}\,\frac{I_0}{A_0}}, \qquad (20)$$

donde el valor de k se puede obtener de la tabla 5.1 en la que se incluyen los resultados obtenidos anteriormente.

Los pináculos de Ely y de la Capilla del King's College de Cambridge

Después del colapso de la torre central de la catedral de Ely en 1322, el crucero se abrió para convertirse en un octógono; los arbotantes que contribuyen a soportar la nueva fábrica están estabilizados en sus extremos por medio de cuatro enormes pináculos de 20 toneladas cada uno. La sección transversal de cada pináculo es aproximadamente cuadrada (de lado $2b$), de modo que la relación I_o/A_o es $b^2/3$, con lo que la ecuación (20) puede reescribirse en la forma

$$f = k\,\frac{b}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \qquad (21)$$

La longitud l es de unos 11 m y el ancho $2b$, aproximadamente, de 1 m. El valor de β (figura 5.5) está en torno a ½. La densidad ρ vale 2.000 kg/m^3, pero el módulo de Young no se puede estimar de modo sencillo. La piedra es un material heterogéneo y los lechos de mortero puede tener módulos con valores uno o dos órdenes de magnitud más bajos que el de la piedra. Se tomará un valor de 20 kN/mm^2; nótese que la frecuencia de vibración es proporcional a la raíz cuadrada del módulo. Utilizando los valores anteriores se puede estimar la frecuencia de vibración de los pináculos de la catedral de Ely a partir de la ecuación (21) y tomando $k = 1{,}161$, como 8,8 Hz.

En junio de 1996 se colocó un andamio en el lado sur del octógono que permitía el acceso a dos de los pináculos. Empleando un sofisticado medidor portátil, el Dr. H. E. M. Hunt del Departamento de Ingeniería de la Universidad de Cambridge, midió la frecuencia de vibración de los pináculos. (El medidor consistía en un ordenador portátil provisto de una tarjeta de recogida de los datos procedentes de dos acelerómetros.) En el pináculo sureste se midieron frecuencias fundamentales de 4,5 y 5,6 Hz en las direcciones NE-SO y SE-NO, respectivamente; en el otro pináculo se obtuvieron resultados similares. En realidad, la sección transversal del pináculo no es cuadrada sino ligeramente romboidal, y cada una de sus cuatro caras está rebajada formando paneles rectangulares.

En la capilla del King's College, el parapeto está coronado por veintidós pináculos; cada uno tiene una longitud de 7,25 m (hasta el punto en que su sección crece rápidamente) y un ancho de $2b = 0{,}95$ m. El valor de β es nuevamente de ½, y considerando las mismas características del material que en el caso anterior se obtiene una frecuencia de 19 Hz. El tramo piramidal de cada pináculo es, en realidad, más estrecho, y

en el arranque su lado es algo menor que 0,95 m; si no se tiene en cuenta esta parte en absoluto, y se considera una longitud de 4 m con sección uniforme y k = 0,559 tomado de la tabla 5.1, entonces la frecuencia que se obtiene es de 30 Hz.

Columnatas

Cuando se golpea, bien con la mano o con un martillo blando, una columna exenta es corriente observar que la columna «canta», y se puede escuchar una nota baja. Esto sucede, por ejemplo, en las arquerías interiores de algunas torres o en las del triforio. Su frecuencia de vibración viene dada por una expresión de la misma forma que la de la ecuación (20); para una columna con los extremos articulados,

$$f_1 = = \frac{\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}\,\frac{I}{A}} \qquad (22)$$

mientras que en el caso de extremos empotrados la frecuencia tiene el valor $f_2 = 2{,}27\, f_1$.

Así, para una columna de 200 mm de diámetro y 4 m de longitud, construida con un material con las mismas características que las indicadas anteriormente, f_1 tiene un valor de 16 Hz y f_2 de 35 Hz.

Nótese que la tensión crítica de pandeo σ_E de una columna como la anterior es de 31 N/mm^2 si los extremos están articulados y 123 N/mm^2 si están empotrados. Se trata de valores muy altos en comparación con las tensiones σ que realmente soporta una columna típica; la frecuencia de vibración de una columna sometida a una determinada tensión σ se reduce por el factor $(1 - \sigma / \sigma_E)^{½}$. En el caso anterior, esta reducción será muy pequeña; por tanto, no se puede conocer el nivel de tensión teniendo en cuenta únicamente la nota emitida.

6

El conoide parabólico-cúbico de Hooke

En 1675 Robert Hooke[1] publicó, como uno de sus «Inventos», un anagrama en latín referente a «la verdadera... forma de todo tipo de arcos en los edificios». Su descubrimiento fue que la forma de un cable flexible y ligero sometido a cargas dadas, al ser invertido, tomaría la forma que debería tener el arco (de fábrica) perfecto para soportar esas mismas cargas. Hooke sabía que la curva catenaria no se obtenía mediante la parábola $y = ax^2$, pero fue incapaz de resolver el problema matemáticamente y el significado de su anagrama no fue publicado hasta después de su muerte. Hooke había afirmado cuatro años antes frente a la Royal Society que la solución al problema equivalente en tres dimensiones, es decir, la forma de la cúpula perfecta, era el conoide parabólico-cúbico; es decir, la cúpula se obtendría girando la parábola cúbica $y = ax^3$ en torno al eje y. Se demuestra que la forma correcta de la cúpula se puede evaluar mediante las integrales erf(t) y erg(t). Es más, una solución alternativa como serie de potencias converge rápidamente, y tiene un término dominante en x^3 seguido por un término mucho menor en x^7. El proyecto de Wren para la cúpula de la catedral de San Pablo se basa, en parte, en la idea de Hooke sobre la «cadena colgante».

El siguiente calendario recoge algunas fechas significativas:

1662 Hooke es nombrado Curator of the Experiments de la Royal Society.
1666 Se aprueba el proyecto de Wren para la cúpula de la vieja catedral de San Pablo el 27 de agosto. El 2 de septiembre comienza el Gran Incendio de Londres.
1669 Primer proyecto de Wren para la nueva catedral de San Pablo.
1672-73 Segundo proyecto de Wren para la catedral de San Pablo (el Gran Modelo).
1675 Proyecto final de Wren (el proyecto Warrant).
1687 Primera edición de los *Principia* de Newton.
1705-08 Construcción de la cúpula de San Pablo.

Introducción

El 8 de diciembre de 1670, en una reunión de la Royal Society:

> El Sr. Hooke presentó este problema de arquitectura: dadas la distancia entre los dos pilares y la altura del arco, encontrar la forma correcta para tal arco, que soporte firmemente, sobre toda su extensión o en parte, una carga cualquiera; igualmente, calcular los estribos de dicho arco. El Sr. Hooke fue preguntado si tenía la demostración de esta útil cuestión, dijo que así era, y que se la mostraría al Presidente.[2]

Este pasaje, acompañado de los que siguen, fueron transcritos por Gunther[3] de las minuciosas actas de la Royal Society publicadas por Thomas Birch.[4]

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52 (1998): 39–50.Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

La «útil cuestión» era el cálculo matemático de la forma correcta de un arco de fábrica, así como el valor de su empuje sobre los apoyos, para cualquier carga dada. Hooke dice conocer la «demostración», es decir, la prueba de la solución al problema.

Una semana después, el 15 de diciembre:

> El Sr. Hooke representó la manera mecánica de construir un arco de tal forma que sea capaz de soportar cualquier carga dada. Al ser preguntado si estaba en posesión de la demostración, contestó que ya se la había dado al Presidente, que no se hallaba presente en la reunión.[5]

Hooke había sido nombrado en 1662 Curator of the Experiments (encargado de los experimentos) de la Royal Society, por lo que acostumbraba, semana tras semana, a presentar demostraciones experimentales, en vez de matemáticas. Evidentemente mostró un experimento referente al comportamiento de arcos el 15 de diciembre. La Royal Society retomó el tema un mes después, el 12 de enero de 1670/71:

> Habiendo sido solicitada la demostración del Sr. Hooke referente a la línea de un arco que haya de soportar cualquier carga que se le asigne, el Sr. Oldenburg mencionó que el Dr. Wren también estaba en posesión de una demostración del problema. Se expresó el deseo de que estas demostraciones fueran ambas presentadas y expuestas por el Presidente.[6]

Una semana después, el 19 de enero:

> El Dr. Wren presentó al Presidente su demostración de la línea que adopta un arco capaz de soportar una carga cualquiera dada. Se requirió al Presidente que la estudiara y la expusiera a la Sociedad. El Sr. Hooke, al ser preguntado por su demostración del mismo problema, contestó que ya había comunicado al Presidente su esencia, quien no obstante le pidió que se la diera igualmente por escrito para que pudiera ser examinada con más tranquilidad y conveniencia.[7]

No hay más referencias a la cuestión en los registros de la Royal Society, si bien, como se verá, se planteó otro problema importante casi un año después, en diciembre de 1671. Parece hoy indudable que Hooke no tenía la «demostración» matemática de la forma adecuada del arco, aunque su entendimiento físico del problema era correcto, y es probable que hubiera mostrado un experimento en una reunión de la Royal Society. No existe ningún registro de la demostración de Wren, pero de nuevo parece probable que él tampoco hubiera obtenido la solución. Lo que sí parece estar claro es que tanto Hooke como Wren, ambos científicos y arquitectos en activo, comprendían con claridad la mecánica del arco de fábrica.

Hooke siguió preocupándose por el problema, y el domingo 26 de septiembre de 1675 (cinco años después de las actas de la Royal Society anteriormente expuestas) recogió en su diario en una nota (cuya transcripción quizás no sea del todo correcta): «Riddle of arch [acertijo del arco], *of pendet continuum flexile, sic stabit grund Rigidum*».[8] Por la misma época Hooke publicó una página con anagramas en su libro sobre helioscopos,[1] de los cuales el número 3 puede descifrarse como el famoso *ut tensio sic vis,* la Ley de Hooke. El anagrama número 2, que fue descifrado por Waller [9] tras la muerte de Hooke, se refiere a «la verdadera forma matemática y mecánica para todo tipo de arcos de edificación, con el verdadero apoyo necesario en cada caso».[10] El anagrama descifrado dice *Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*, como cuelga un hilo flexible, así, pero invertido, se mantendrá en pie el arco rígido.

Publicar en forma de anagrama era algo común en el siglo XVII. El clima del mundo de la ciencia era competitivo y los científicos estaban preocupados por establecer su prioridad en la obtención de soluciones tanto para problemas establecidos como para problemas nuevos. No obstante, era importante guardar celosamente cualquier clave; revelar una pista podría permitir a otro investigador, quizá alguien de mayor destreza matemática, encontrar la solución primero. En el caso del arco, Hooke tuvo una idea nueva: la estática de una cadena colgante, traccionada, era la misma que la de un arco, en compresión. Si las matemáticas de la «catenaria» pudieran resolverse, no sólo se podría obtener la forma del arco, sino que también se podría determinar el valor, fundamental, del empuje sobre los apoyos.

Hooke, y quizá esto no sea sorprendente, no pudo nunca resolver el problema matemático de la catenaria, la forma que toma un cable pesante flexible de sección constante. Tal como explica Truesdell,[11] los tres gigantes, James Bernoulli, Leibniz y Huygens, se hallaban en 1690, de manera competitiva y con éxito, inmersos en la búsqueda de la solución del problema;

también ellos fueron reacios a comunicarse todos los detalles de sus descubrimientos. La forma «obvia» de la cadena colgante era la parábola, pero Huygens había demostrado, ya en 1646, que esto era incorrecto. Es más, Huygens demostró entonces que la parábola era la forma de la cadena colgante sujeta a una carga horizontal uniformemente distribuida. El «cálculo de curvas», previo a la invención formal del cálculo integral, estaba ya avanzado; la obra *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri,[12] publicada en 1635, ofrecía resultados generales de la «integración» de funciones de potencias, interpretadas como áreas bajo las curvas. Por tanto, una carga horizontal uniformemente distribuida, al ser integrada, daba una forma cuadrática, esto es, una parábola. Sin embargo, la masa uniforme de una cuerda se distribuye a lo largo de su longitud, y no horizontalmente.

La catenaria

La figura 6.1(a) muestra un arco «perfecto», con el origen de coordenadas en la coronación ($dy/dx = y = 0$, para $x = 0$), y la carga de valor w se distribuye uniformemente a lo largo de la curva; la forma del arco sigue exactamente la línea de empujes. Por lo tanto, de la figura 6.1(b):

$$\left.\begin{aligned} w\,ds &= d(P \operatorname{sen} \psi) \\ \text{y} \quad d(P \cos \psi) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ya que $\operatorname{tg}\psi = dy/dx$, y $(ds/dx)^2 = 1 + (dy/dx)^2$, es fácil demostrar que

$$y = \frac{1}{k}(\cosh kx - 1) \tag{2}$$

donde k es una constante que depende de la carga w y del valor P_0 de la componente horizontal del empuje sobre los apoyos del arco:

$$k = \frac{w}{P_0} \tag{3}$$

Se pude estudiar la relación entre la ecuación (2) y una parábola expandiendo el coseno hiperbólico como una serie:

$$y = k\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{k^2x^4}{4!} + \frac{k^4x^6}{6!} + \frac{k^6x^8}{8!} + \dots\right] \tag{4}$$

Si las curvas de las ecuaciones (2) y (4) pasan por el punto (1,1), de modo que la catenaria se pueda comparar con un arco semicircular de radio igual a la unidad, el valor de k resulta igual a 1,61614, y la ecuación (4) pasa a ser:

$$y = (0{,}8081)\left[x^2 + (0{,}2177)\,x^4 + (0{,}0190)\,x^6 + (0{,}0009)\,x^8 + \dots\right] \tag{5}$$

Para $x < 1$, la serie de la ecuación (5) converge rápidamente, siendo dominante el término en x^2. La catenaria se aproxima a la parábola, como se puede ver en la figura 6.2; en la práctica, se podría construir un arco de fábrica de espesor pequeño, pero finito, siguiendo cualquiera de los dos perfiles. El radio de curvatura del arco semicircular en la clave tiene, por supuesto, valor 1: los correspondientes

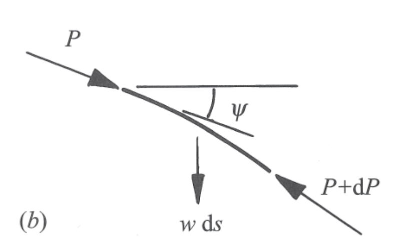


Figura 6.1
Análisis de membrana de un arco bidimensional

valores para la parábola y la catenaria son ½ y $1/k$ (= 0,62), respectivamente.

El conoide parabólico-cúbico

En la reunión de la Royal Society celebrada el 7 de diciembre de 1671:

> El Sr. Hooke expuso la representación de la forma del arco de una cúpula capaz de soportar ciertas cargas dadas, descubriendo que se trata de la forma del conoide parabólico-cúbico; añadiendo que mediante esta forma se pueden resolver todas la dificultades en arquitectura sobre los arcos y estribos. Se le ha solicitado que traiga por escrito la demostración y descripción del hallazgo para que sea registrado.[13]

No hay registro de que Hooke llegara a presentar a la Royal Society tal demostración.

La línea de pensamiento de Hooke parece clara. La carga uniformemente distribuida en una cuerda bidimensional conduce a la parábola, o más bien a la catenaria, muy próxima, de la figura 6.2. Para la cúpula, considerada como una cáscara de revolución, el peso propio de la cáscara de espesor uniforme varía según el cuadrado de la distancia desde la clave, y, al «integrar», se obtiene una función cúbica. Así, Hooke afirmó que la forma perfecta para la cúpula se obtendría rotando la parábola cúbica $y = ax^3$ en torno al eje y, que conduce al conoide parabólico-cúbico (para $x > 0$. La curva $y = ax^3$ no es, por supuesto, simétrica en torno el eje y; Westfall[14] advierte que este hecho no fue apreciado ni siquiera por el joven Newton).

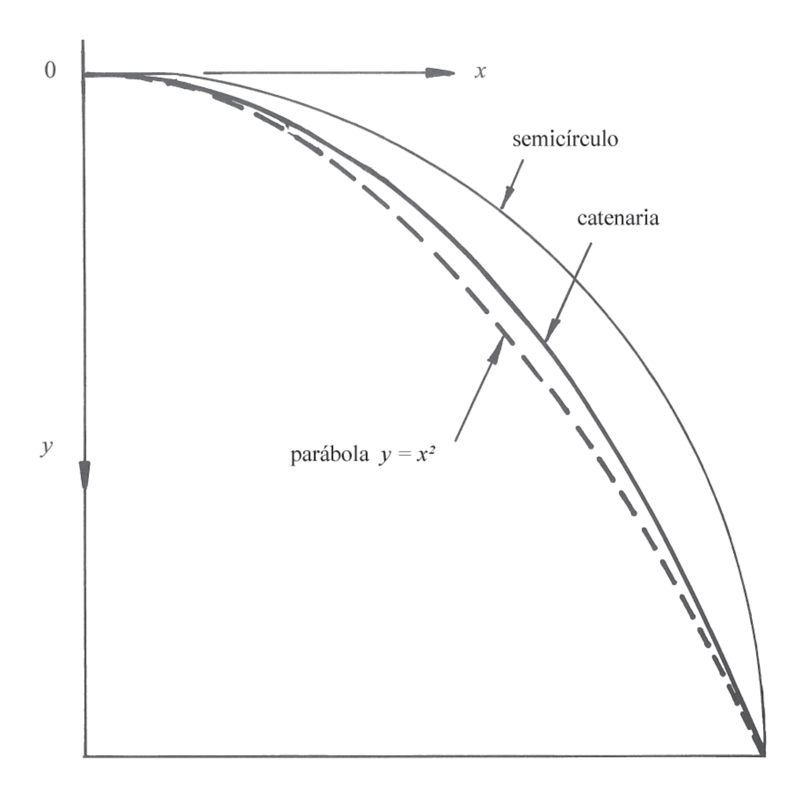


Figura 6.2
La catenaria comparada con la parábola y el círculo

La forma correcta para la cúpula de fábrica ideal ha sido estudiada por Heyman.[15, 16] Se supone a la fábrica incapaz de soportar tensiones de tracción, de manera que las fuerzas anulares podrían producir agrietamientos a lo largo de los meridianos de la cúpula. Para este material unilateral se pueden considerar rebanadas quasi-bidimensionales de la cúpula; en una rebanada de espesor correspondiente al ángulo $d\theta$ únicamente actúa la resultante de tensiones meridianas N, puesto que las resultantes de tensiones de cortante son cero para una cáscara simétrica. En la figura 6.3(a) se muestra la curva generatriz; las ecuaciones de membrana para el elemento de la figura 6.3(b) son:

$$\left.\begin{aligned} & \mathrm{d}(Nx \cos \psi) = 0 \\ \text{y} \quad & \mathrm{d}(Nx \operatorname{sen} \psi) = wrx\,\mathrm{d}\psi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Puesto que $r \cos \psi = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\psi$, es fácil demostrar que:

$$\sec\psi + \mathrm{tg}\psi = e^{x^2/x_0^2} \tag{7}$$

donde x_0 es una constante de integración y se cumple la condición $x = 0$, $\psi = 0$.

La ecuación (7) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\psi = \frac{1}{2}\left(e^{x^2/x_0^2} - e^{-x^2/x_0^2}\right) \tag{8}$$

de modo que, finalmente, la forma de la cúpula ideal viene dada por la expresión:

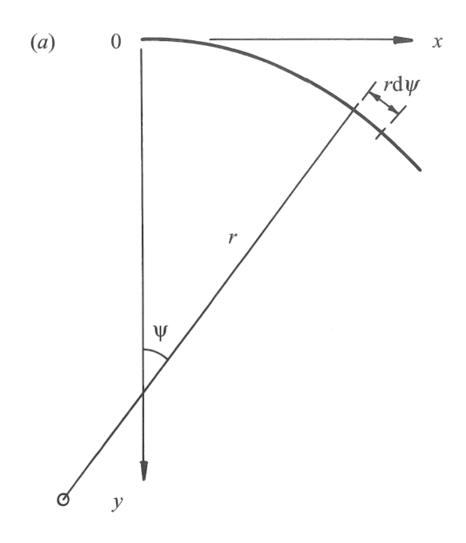
$$y = \frac{1}{2}x_0\left[\int_0^{x/x_0} e^{t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{x/x_0} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right] \tag{9}$$

Se pueden obtener valores de la primera integral ($\mathrm{erg}(x/x_0)$) y la segunda integral ($\sqrt{\pi}/2\ \mathrm{erf}(x/x_0)$) en tablas estándar.

La relación de la ecuación (9) con la parábola cúbica se puede mostrar desarrollando en serie la ecuación (8) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}x_0\left(e^{t^2} - e^{-t^2}\right) \\ &= x_0\left[t^2 + \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{5!}t^{10} + \frac{1}{7!}t^{14} + \dots\right] \end{aligned} \tag{10}$$

donde la sustitución $t = x / x_0$ se realiza de modo temporal. Por tanto



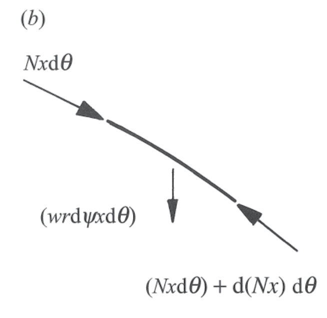



Figura 6.3
Análisis de membrana de la cúpula sin tracciones

$$y = \frac{1}{3}x_0\left[t^3 + \frac{1}{14}t^7 + \frac{1}{440}t^{11} + \frac{1}{25.200}t^{15} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{3x_0^2}\left[x^3 + \frac{1}{14}\frac{x^7}{x_0^4} + \frac{1}{440}\frac{x^{11}}{x_0^8} + \frac{1}{25.200}\frac{x^{15}}{x_0^{12}}\right] + \ldots \quad (11)$$

Si, tal y como ocurre en el caso de la cadena bidimensional, la curva de la ecuación (11) pasa por el punto (1,1), entonces resulta un valor para x_0 de 0,680128 y la ecuación (11) pasa a ser

$$y = (0{,}7206)\left[x^3 + (0{,}3338)\,x^7 + (0{,}0496)\,x^{11} + \right.$$
$$\left. + (0{,}0041)\,x^{15} + (0{,}0002)\,x^{19} + \ldots\right] \quad (12)$$

La ecuación (12) se muestra gráficamente en la figura 6.4, donde se compara con la parábola cúbica de Hooke y con una sección de semiesfera. La cúpula perfecta de la ecuación (12) cabe dentro de una semiesfera de espesor ligeramente mayor al 4 por ciento del radio (compárese, con la cúpula de San Pedro de Roma, que tiene un espesor de aproximadamente el 15 por ciento de su radio).

El radio de curvatura en el origen para el perfil de la ecuación (11) es infinito (tal y como ocurre en la parábola cúbica). Por lo tanto, las tensiones meridianas *N* son también infinitas en la coronación de la cúpula perfecta, como, de hecho, puede deducirse del examen de la primera de las ecuaciones (6). Para valores pequeños de ψ (figura 6.3) las tensiones anulares

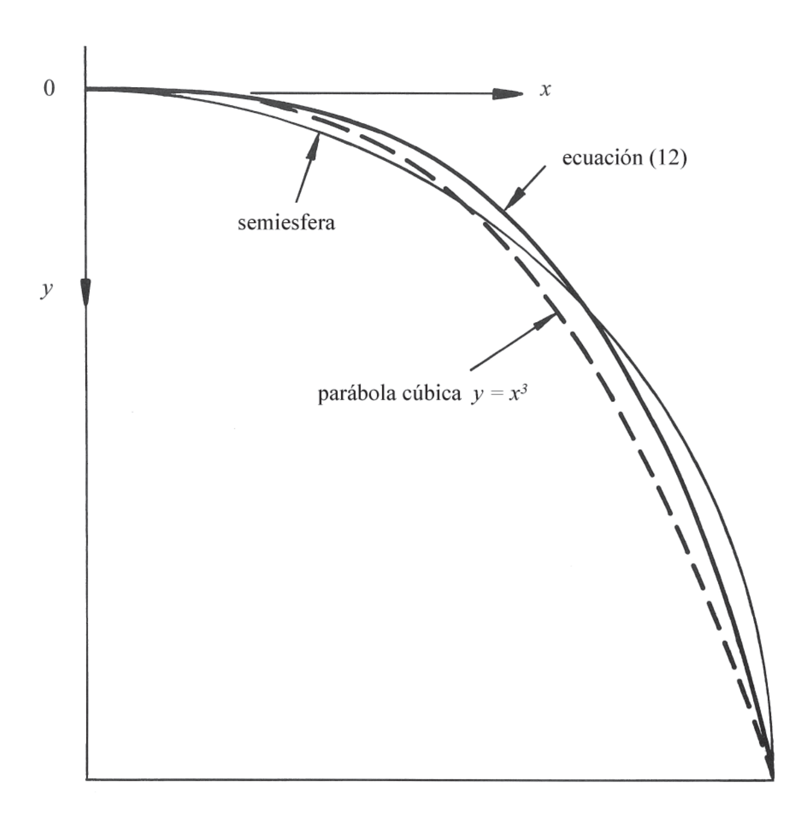


Figura 6.4
La cúpula «perfecta» comparada con la parábola cúbica y la semiesfera

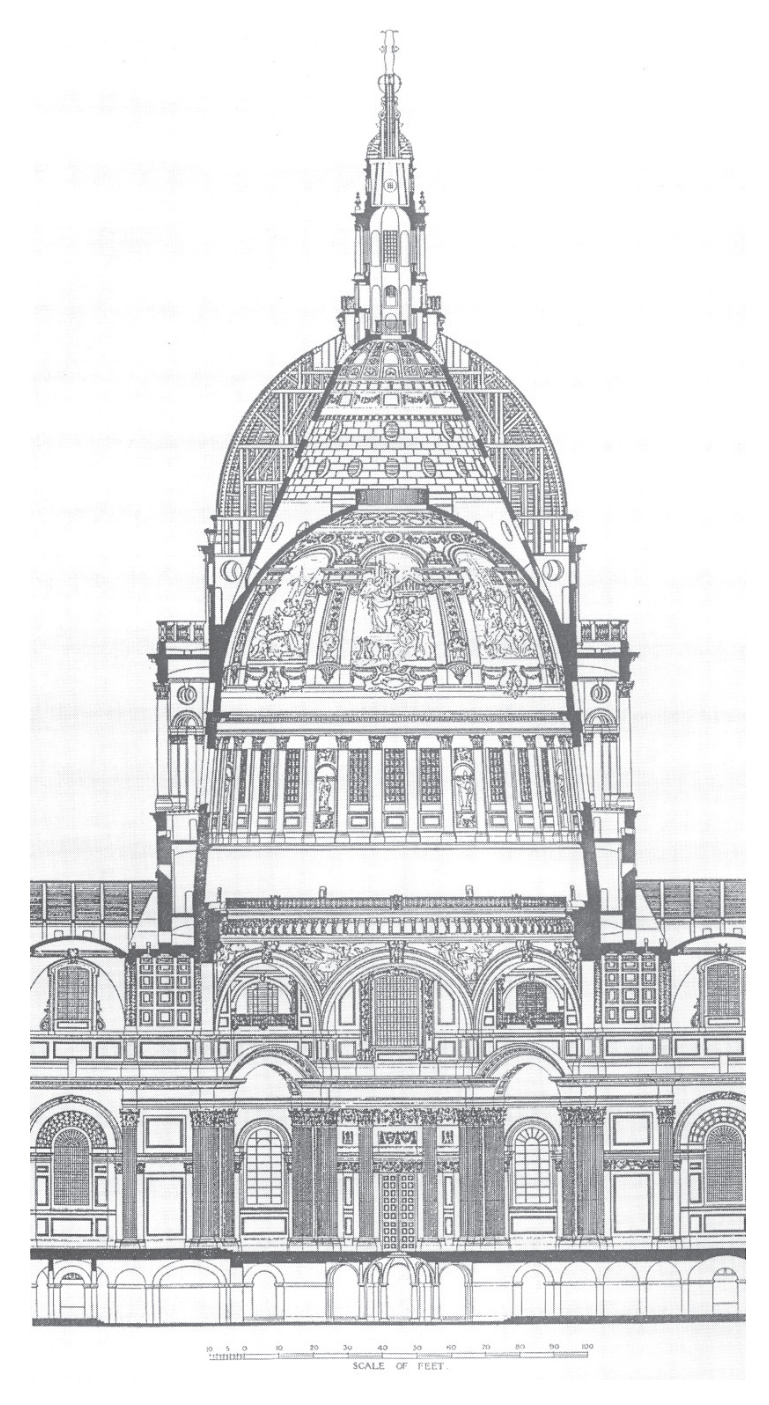


Figura 6.5
Sección de la cúpula de la catedral de San Pablo

son de compresión y la solución «sin tracción» que da origen a las ecuaciones (9) u (11) puede combinarse con un análisis de membrana convencional para, digamos, $\psi < 25º$. La coronación de cúpulas existentes (San Pedro de Roma; el Panteón de Roma; Santa Maria del Fiore, Florencia, véase Heyman[17]) está sin agrietar, pero las cúpulas muestran grietas meridianas para $\psi > 25º$. Como pueden existir tensiones anulares de compresión para valores menores de ψ, es posible omitir enteramente el material cerca de la coronación, creando una cúpula con un óculo, como ocurre en el Panteón de Roma y en la cáscara interior de la cúpula triple construida por Wren para la catedral de San Pablo en Londres.

La catedral de San Pablo, Londres

La historia de la reconstrucción de Londres tras el Gran Incendio de 1666 es bien conocida. Wren no sólo era Surveyor de la Catedral de San Pablo, sino que era también Surveyor-General de la reconstrucción de la City, y en 1669 fue nombrado además Surveyor-General de las Construcciones Reales (Royal Works). Asimismo, Hooke fue nombrado Surveyor de la City inmediatamente después del incendio; ambos, Wren y Hooke, supervisaron la práctica totalidad de los trabajos de reconstrucción. Entre ellos existió una estrecha relación; en su diario, Hooke menciona a Wren en numerosas ocasiones en relación tanto a temas arquitectónicos como científicos.

Wren realizó tres proyectos principales (así como toda una colección de variantes) para la nueva catedral de San Pablo. El primero se terminó a finales del año 1669, y más tarde se construyó un modelo en madera. No obstante, el proyecto no gustó, alegándose que se trataba de una iglesia demasiado pequeña, inapropiada para el nuevo Londres en aquellos momentos en construcción. La segunda propuesta de Wren era radicalmente diferente; la catedral era de planta en cruz griega con una cúpula central, una configuración que se alejaba de la composición gótica de nave, cabecera y transepto. En un principio, la propuesta fue aceptada y se construyó un modelo de gran tamaño, terminado en 1673. Este modelo, conocido como el Gran Modelo, aún se conserva. Hooke anota en su diario con fecha 2 de Noviembre de 1672 que «vio el modelo de San Pablo aprobado por el rey». Es muy probable que estuviera hablando del Gran Modelo; no obstante, el término «modelo» se empleaba también en el siglo XVII para referirse a un «proyecto» que podía consistir, por ejemplo, en un dibujo. De cualquier modo, este segundo proyecto fue rechazado en 1674, principalmente por motivos litúrgicos (y Wren «decidió no construir más modelos, ni mostrar públicamente sus dibujos, que (tal y como había comprobado por propia experiencia) suponía una pérdida de tiempo y en muchas ocasiones exponía sus proyectos a la opinión de jueces incompetentes»).

El tercer proyecto, el «proyecto Warrant», fue aprobado por el rey el 14 de mayo de 1675. Este es el proyecto de la catedral actual, aunque durante el largo periodo de construcción Wren realizó numerosas modificaciones de detalle y ciertos cambios radicales en la geometría de la cúpula. La cúpula se terminó en 1708, tras más de tres años de trabajos. De hecho, Wren ya había proyectado una cúpula para la catedral vieja de San Pablo, proyecto que había sido aprobado el 27 de agosto de 1666, seis días antes del comienzo del Gran Incendio; esta cúpula tenía una característica que iba a ser modificada significativamente: la estructura principal de apoyo de la cúpula era vertical.

El sábado 5 de junio de 1675, Hooke escribe en su diario que estaba «En casa de Sir Chr. Wren.... que estaba trabajando con mi principio sobre arcos y modificó su módulo con él».[18] Aquí la palabra «módulo» (= modelo) se refiere sin duda al proyecto y no a un modelo material, y la modificación hecha por Wren puede verse en la sección de la figura 6.5, en la que aparece la cúpula tal y como se construyó. La cúpula interior de fábrica, con un óculo, está envuelta por una cúpula cónica que soporta la linterna, y estas dos cúpulas están rodeadas por una tercera cúpula de madera recubierta de plomo. Los lados de la obra de fábrica se inclinan hacia adentro, siguiendo la dirección de las fuerzas (compárese con las curvas idealizadas de las figuras 6.2 y 6.4); un visitante no percibirá esta distorsión geométrica desde el suelo, en el interior de la catedral, y desde el exterior queda disimulada por la columnata circular vertical que rodea el tambor.

La cadena de Hooke no puede nunca colgar verticalmente de sus apoyos; la inclinación de la línea de empujes de una cúpula da la medida de los fuerzas horizontales que la cúpula ejerce sobre la fábrica en

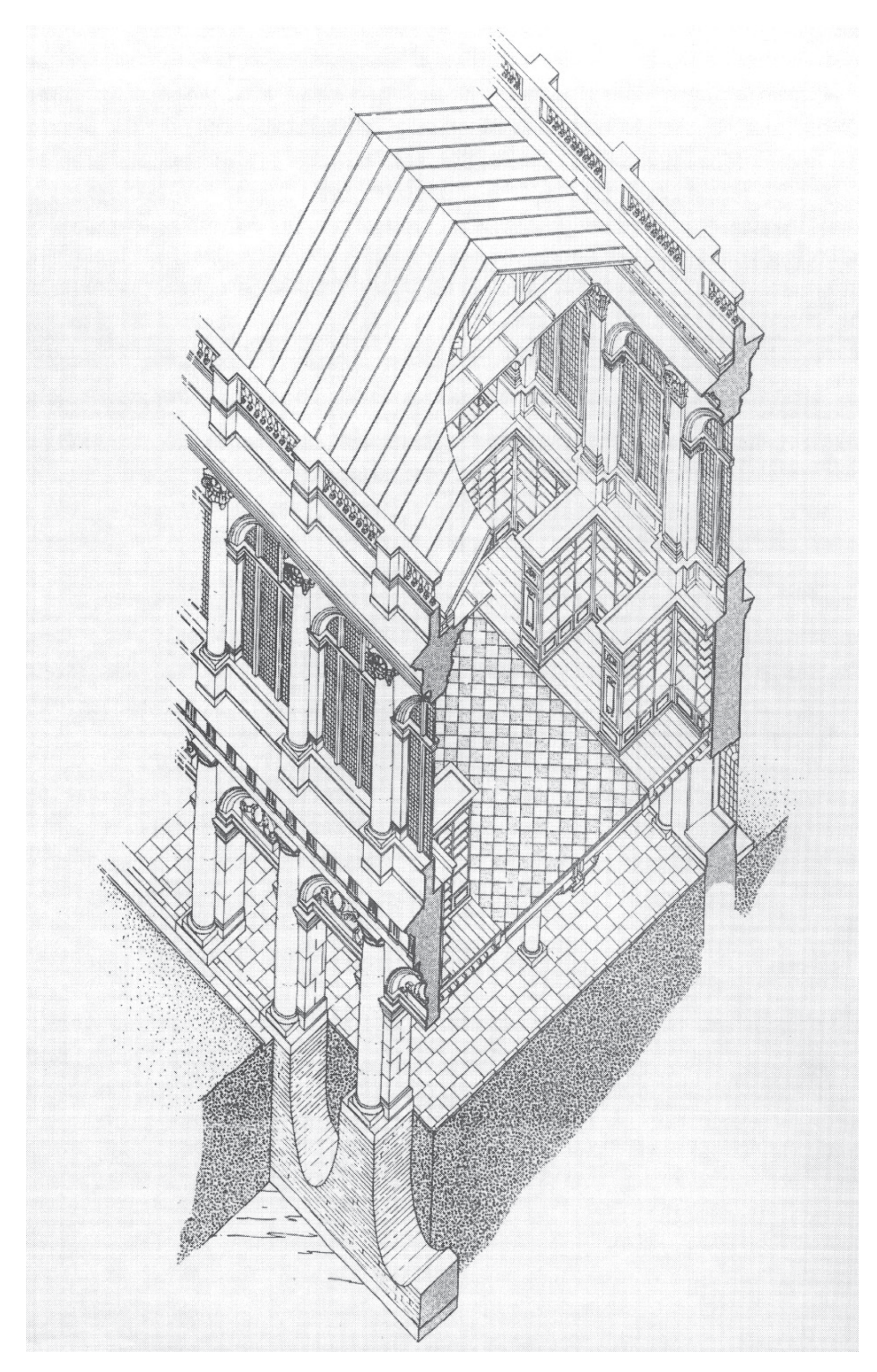


Figura 6.6
Perspectiva axonométrica de la biblioteca de Wren para el Trinity College, Cambridge, mostrando los arcos invertidos de las cimentaciones (según McKitterick)

la que se apoya. Wren introdujo tres cadenas circulares para ayudar a contener estos empujes.

Conclusión

El propio Hooke afirma explícitamente que era *su* principio sobre de la mecánica de los arcos el que se estaba empleando en los proyectos de Wren, y no parece que haya ningún desacuerdo al respecto. Hooke se volvió cada vez más desconfiado y reservado, y llegó a tener tres grandes disputas con científicos de gran renombre, entre las que se encuentra la famosa disputa con Newton acerca del descubrimiento de la ley de gravitación universal. Sin embargo, no parece que Hooke y Wren tuviesen secretos entre ellos y, pese a que Wren modificó «su módulo» en 1675 llegando por fin al proyecto final de la cúpula, el segundo proyecto (el Gran Modelo) de 1672 ya mostraba una inclinación hacia dentro de la fábrica que soportaba la cúpula. Como se ha dicho, el problema de los arcos fue presentado por Hooke ante la Royal Society en 1670. El siguiente siglo Poleni[19] analizó el estado de la cúpula de San Pedro de Roma y empleó experimental y teóricamente la idea de la cadena colgante de Hooke, conocida a través de Gregory[20] y Stirling.[21]

Apéndice

Tanto Wren como Hooke estaban familiarizados con la obra de Alberti *On the art of building, (Editio princeps, 1486)*. La obra fue reeditada en latín en 1512 en París, y traducida al francés en 1533. La primera traducción al inglés fue publicada en 1726, si bien Moxon[22] ya cita a Alberti en 1703. El siguiente párrafo sobre cimentaciones (traducción de Rykwert et al.[23]), se extrae del capítulo 5 del libro 3:

> En el caso de las columnatas, no es necesario una zanja en toda su longitud con una estructura continua; es preferible reforzar las bases de las columnas y conectarlas entre sí mediante arcos invertidos, con su trasdós hacia abajo.

Las cargas repartidas que actúan sobre una arcada continua, o un puente de varios vanos, se resisten por líneas de empujes en arco que llevan las cargas a las columnas o a las pilas. Si las columnas se ramifican, bajo el suelo, formando arcos invertidos, las cargas de las columnas se convertirán en cargas repartidas, que se transmitirán finalmente al terreno por el trasdós de los arcos. Según Moxon:

> El ingenioso surveyor Sr. Hooke empleó este artificio, según mi información, a la hora de construir la atrevida casa de Bloomsbury para Lord Montague, en el condado de Middlesex.[24]

Montague House fue construida según un proyecto de Hooke entre 1675 y 1679; posteriormente la casa se convirtió en el British Museum.

La biblioteca del Trinity College, Cambridge, obra de Wren, se comenzó en 1675–76, en terreno robado al río Cam; Howard Colvin ha descrito su construcción en McKitterick.[25] La planta baja está abierta y la biblioteca se apoya sobre filas de columnas. Escondidos bajos el suelo las columnas se ramifican en complejos arcos invertidos, figura 6.6.

7

El análisis de Coulomb del empuje de los suelos

La memoria de Coulomb[1,2] «sobre algunos problemas estáticos, relevantes para la arquitectura», se publicó en 1776; Coulomb había presentado una memoria en dos partes a la Academia Francesa de las Ciencias, el 10 de marzo y el 2 de abril de 1773. El artículo es muy citado, pero quizá no tan leído. Sin embargo, todo ingeniero geotécnico conoce un distintivo: la figura de la última página, un *cul-de-lampe*, se reproduce en la portada de cada número de la revista del ICE *Géotechnique* (figura 7.1).

La memoria tiene un alcance más amplio que el análisis del empuje de los suelos, ya que trata también la flexión de vigas, la fractura de columnas, y el cálculo de los empujes ejercidos por un arco de fábrica contra sus estribos. Estos problemas, junto con el del muro de contención, fueron los problemas fundamentales de la ingeniería civil durante el siglo XVIII. En lo que a Coulomb respecta, estos problemas se le presentaron de forma apremiante en el curso de su primera misión como ingeniero militar; el Ejército le había enviado a Martinica a construir una fortaleza contra la posibilidad de nuevos ataques de los ingleses.

Coulomb se dio cuenta de que lo que le habían enseñado durante el curso de dos años en el Real Colegio de Ingenieros en Mézièrs en realidad no era suficiente para ejercer la práctica. Tenía un ejemplar del manual de Bélidor[3] de 1729, que daba reglas razonablemente eficaces para el proyecto de fortificaciones. Sin embargo, Coulomb era a la vez un teórico con una fuerte inclinación por las matemáticas y un ingeniero práctico preocupado por la economía y la resistencia. Como teórico, podía apreciar el carácter arbitrario de algunas de las reglas de proyecto; como hombre práctico podía apreciar que algunas reglas eran ineficientes. Coulomb se impuso a sí mismo la tarea de hacer unas reglas mejores y más racionales para cada uno de los cuatro problemas «clásicos», y presentó su trabajo a la Academia cuando volvió a Francia después de nueve años en una Martinica azotada por las fiebres. Había arruinado su salud, aunque vivió hasta la edad de 70 años.

La memoria fue su primera publicación. Con ella dio un primer paso en la carrera académica y supuso el comienzo de un lento alejamiento tanto de la ingeniería civil como del Ejército. De un total de 32 memorias de la Academia (renombrada Instituto después de la Revolución), sólo nueve tratan temas de ingeniería mecánica, mientras que 22 pertenecen al campo de la física. Entre 1785 y 1791 escribió su famosa serie de siete artículos sobre electricidad y magnetismo, y su nombre todavía se usa para denominar la unidad de carga eléctrica. Hay una memoria anómala sobre la fisiología de las plantas; Coulomb realizó experimentos sobre la circulación de la savia mientras vivía fuera del peligroso París entre 1791 y 1793.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Coulomb's analysis of soil thrust,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Geotechnical Engineering* 131 (1998): 83–88.Traducción de Paula Fuentes González.



Figura 7.1
Cul-de-lampe de la Memoria de Coulomb

Su artículo sobre el rozamiento es quizá el más recordado entre las memorias de ingeniería («el rozamiento de Coulomb» es todavía un concepto básico). El tema fue propuesto por la Academia para un concurso, pero el interés de Coulomb surgió, como de costumbre, por la relevancia práctica de la materia, realizando un gran número de experimentos sobre «máquinas simples». La colección póstuma de ensayos sobre *Théorie des machines simples*[4] (donde se reimprimió la memoria de 1773) también contiene artículos sobre la forma de las aspas de los molinos de viento, sobre la torsión de alambres y sobre la velocidad a la que pueden trabajar los obreros.

Uno de los artículos importantes de Coulomb fue sobre el diseño de un *caisson* para trabajos bajo el agua; en su primera etapa estuvo interesado en la hidráulica, y escribió sobre problemas de esclusas. Como resultado directo del estudio de los problemas de bombeo de agua, fue nombrado Superintendente de las fuentes del Rey. El trabajo no era una sinecura; fue responsable del suministro de agua de todos los edificios reales en París, Versalles y Fontainebleau, así como de los suministros públicos procedentes de los acueductos del rey. Pero la carrera de Coulomb como funcionario público y como físico llegó cuando tenía 50 años; finalmente renunció a su cargo en el ejército a la edad de 54 años, al principio de la Revolución, y vivió de su pensión y pequeños estipendios del gobierno. Su trabajo sobre la mecánica del suelo lo había realizado 20 años antes.

Los cuatro problemas

El primero de los cuatro problemas de Coulomb de su memoria de 1773 sobre estática es el de la resistencia de las vigas. Generalmente se le atribuye el haber sido el primero en situar correctamente el eje neutro de la flexión elástica, en el centro de una sección transversal simétrica. Resulta irónico que esta atribución sea incorrecta en dos aspectos. En primer lugar, Parent[5] había publicado la solución correcta en 1713, exactamente 60 años antes, aunque este trabajo fue casi con seguridad desconocido para Coulomb. En segundo lugar, Coulomb no estaba tratando de resolver el problema elástico; estaba siguiendo la línea derivada directamente de Galileo[6] (1638) de tratar de encontrar la *resistencia última* de una viga a flexión.

La figura 7.2 muestra las ilustraciones de dos de los ensayos de Coulomb sobre vigas de piedra en voladizo. En la *Fig. 2* de Coulomb la carga está aplicada lo más cerca posible del comienzo del voladizo —Coulomb estaba tratando de encontrar la resistencia a cortante del material, y relacionarla con los resultados del ensayo a flexión de la *Fig. 3*. Coulomb proponía que la fractura se producía a cortante y usó esta idea para abordar el segundo problema, la fractura a compresión de las columnas.

La *Fig. 5* de Coulomb muestra una columna, suponiendo un plano de fallo por cortante *CM*; Coulomb se propuso encontrar la posición de este plano y el valor correspondiente de la carga axial. Argumenta desde lo que ahora se llama el teorema del límite superior de la plasticidad —se debe elegir el ángulo del plano de fractura que haga mínimo el valor de la carga axial (y de ahí el uso de las palabras *máximo* y *mínimo* en el título de la memoria). Como se verá, Coulomb considera tanto la cohesión como el rozamiento. Muestra, por ejemplo, que en ausencia de rozamiento, el plano tendrá una inclinación de 45° con respecto al eje de la columna, independientemente de la forma de la sección transversal.

Coulomb es correcto y preciso en la aplicación de los principios del máximo a sus problemas, y aborda el problema mucho más difícil del empuje del suelo contra un muro de contención exactamente de la misma manera. Era necesario conocer el valor del empuje para saber qué espesor había que dar a los muros de contención de fábrica; éste había sido un problema corriente durante cerca de un siglo, desde que el marqués Vauban perfeccionara un

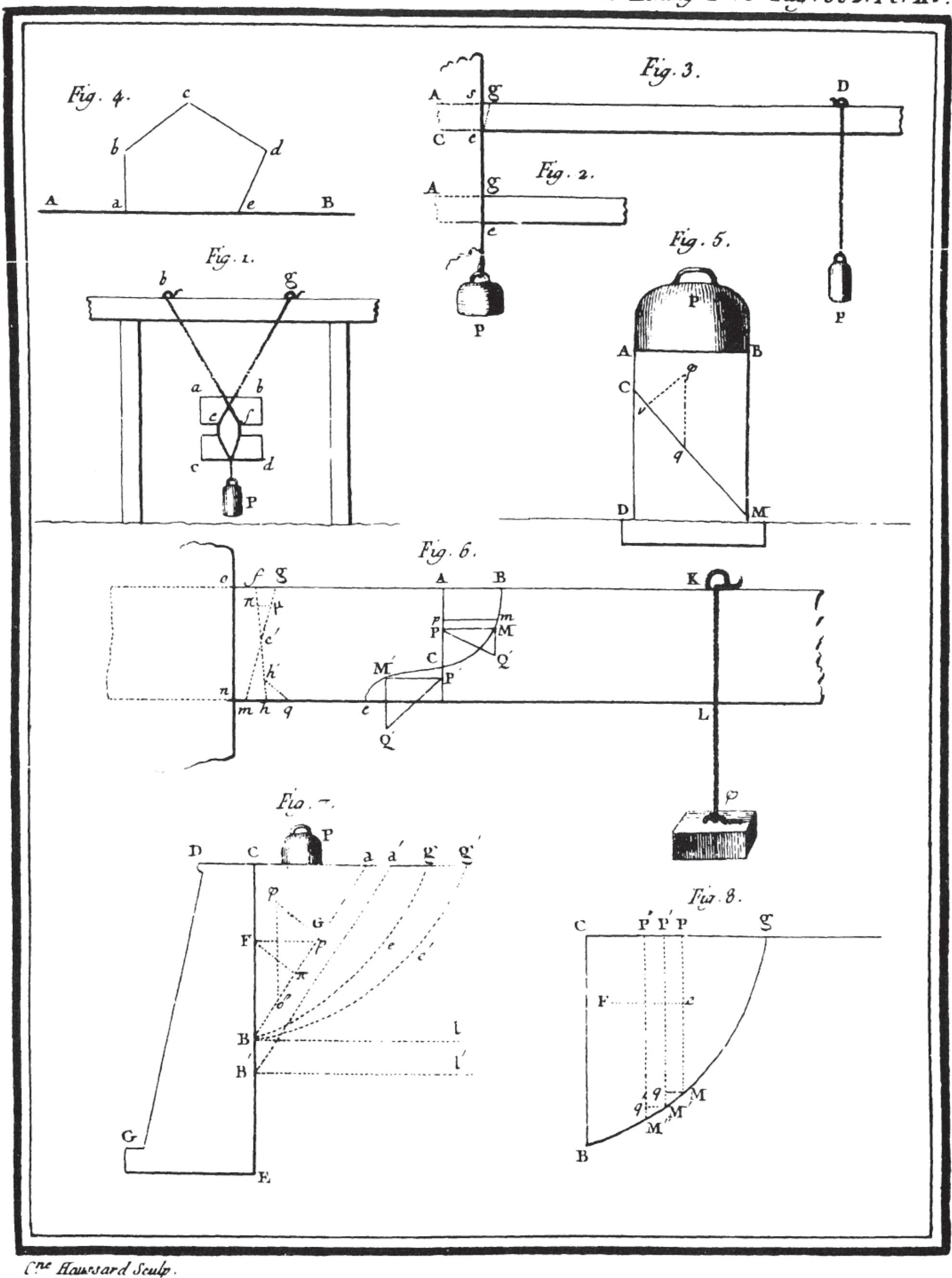


Figura 7.2
Lámina I de la memoria de Coulomb

sistema de construcción de fortificaciones que requería cortes profundos en el suelo. El mismo Vauban había dado tablas con el espesor de los muros, y su talud, para diversas profundidades de corte, y el manual de Bélidor daba unas tablas similares. Estos espesores eran innecesariamente grandes, y la conclusión de Coulomb fue que, en muchos casos, se podían reducir.

Coulomb hace dos avances extraordinarios en su tratamiento del problema del empuje de los suelos. Autores anteriores habían considerado el suelo como un material con rozamiento interno; el ángulo de rozamiento se podía hallar observando la pendiente natural límite del suelo. Coulomb introduce un segundo parámetro, la cohesión, y se las arregla para llevar a cabo un análisis complejo en términos de estas dos constantes experimentales: el rozamiento y la cohesión. En segundo lugar, aunque sigue trabajos previos al tratar de encontrar el empuje del suelo en el fallo incipiente del muro de contención, no supone a priori el ángulo de rotura del suelo.

En su lugar, igual que para la fractura de la columna, Coulomb trabaja en función de un ángulo desconocido, y hace máximo el empuje sobre el muro a fin de encontrar la superficie de rotura (que no es la misma que la pendiente natural del suelo). Una vez más, está aplicando sólidos principios de análisis límite, y anticipando correctamente los teoremas de los límites de la teoría de la plasticidad.

Por último, Coulomb elimina eficazmente las propiedades del material del estudio de los arcos;[7] mediante el uso de la noción de «articulación» entre los bloques de fábrica, muestra cómo calcular el valor del empuje de un arco sobre el estribo, utilizando de nuevo los «principios de máximo y mínimo».

La fractura de columnas

Coulomb hace el estudio de la columna como preámbulo a su trabajo sobre el suelo. La conocida «ecuación de Coulomb» es

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \phi \qquad (1)$$

donde τ es la tensión cortante que actúa en la superficie de rotura, y σ es la tensión normal de compresión correspondiente; las constantes del material son la cohesión c y el ángulo de rozamiento ϕ. Coulomb no escribió la ecuación explícitamente, pero su análisis matemático de la rotura de la columna es esencialmente el que se da en los siguientes párrafos.

La figura 7.3 muestra las fuerzas que actúan en la parte superior de la columna al romper por un plano inclinado con un ángulo θ respecto a la horizontal bajo una carga de compresión P; el área de la sección transversal de la columna (en realidad con una forma prismática arbitraria) se ha tomado como a^2. Las dos ecuaciones de equilibrio dan

$$\tau \cos \theta = \sigma \operatorname{sen} \theta \qquad (2)$$

$$P = (\sigma \cos \theta + \tau \operatorname{sen} \theta)\, a^2 \sec \theta \qquad (3)$$

Las tensiones τ y σ se pueden eliminar de las ecuaciones (1), (2) y (3) y se obtiene

$$P = \frac{ca^2}{\cos^2 \theta\, (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \phi)} \qquad (4)$$

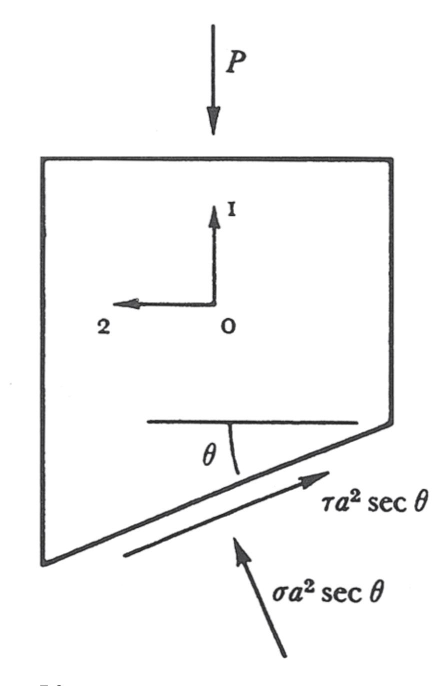


Figura 7.3
Rotura por cortante en una columna con una carga de compresión

De hecho, Coulomb presenta en primer lugar el caso más sencillo en el que no se tiene en cuenta el rozamiento, es decir $\phi = 0$, y así

$$P = \frac{ca^2}{\text{sen}\,\theta \cos\theta} \qquad (5)$$

A continuación, sostiene que existirá un plano más débil a lo largo del cual se producirá la fractura, de modo que el valor de P debe hacerse mínimo con respecto a θ en la ecuación (5), y por lo tanto la fractura se producirá para $\theta = 45$ °.

Para la ecuación completa (4) que tiene en cuenta la cohesión y el rozamiento, el valor mínimo de P viene dado por

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\phi + \sec\phi = \text{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi\right)$$
$$= \text{ctg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (6)$$

Coulomb no obtuvo estas sencillas ecuaciones; él trabaja en términos de rozamiento constante n, donde tg $\phi = 1/n$, por lo que la ecuación (6) en su memoria aparece como

$$\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{n}} \qquad (7)$$

Fue Prony[8] (un colega de Coulomb) quien simplificó la notación, e introdujo el ángulo ς, donde

$$\varsigma = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (8)$$

Así, el valor mínimo P_{min} de la ecuación (4) puede escribirse como

$$P_{\text{min}} = 2ca^2\,\text{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi\right)$$
$$= 2ca^2\,\text{ctg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi\right)$$
$$= 2ca^2\,\text{ctg}\,\varsigma \qquad (9)$$

Prony dio una interpretación física del ángulo ς, figura 7.4. Sobre la línea horizontal AB se coloca el ángulo de rozamiento ϕ que da un triángulo rectángulo ABC; a continuación, la bisectriz CD del ángulo en C da la superficie de rotura. (Prony desarrolló este resultado para determinar la cuña de suelo que da el mayor empuje sobre un muro de contención.)

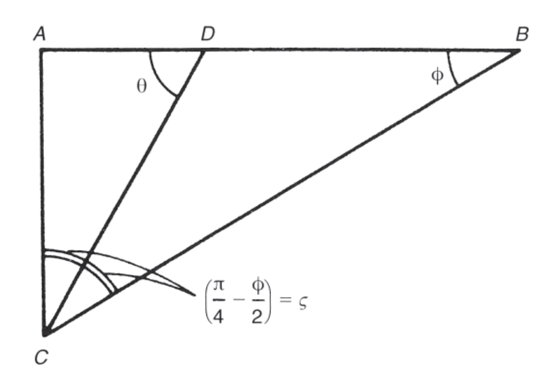


Figura 7.4
Relación entre la superficie de rotura y el ángulo de rozamiento

El empuje de los suelos no cohesivos

Coulomb utiliza las mismas técnicas para discutir el problema del empuje del suelo contra un muro de contención en el momento del colapso. Como se ha señalado, no asume una superficie de rotura; de hecho, la *Fig. 7* (figura 7.2) muestra que estaba considerando superficies curvas. Coulomb trata de establecer las ecuaciones de estas superficies curvas, pero le fallaron las matemáticas, y tras dos o tres páginas abandona el análisis. Su principal estudio tiene que ver con la cuña de suelo (figura 7.5) que empuja en la parte posterior del muro de contención.

Al igual que con la fractura de una columna, Coulomb comienza con un caso sencillo, en esta ocasión, supone que el suelo tiene rozamiento pero no cohesión (como se aplicaría, dice Coulomb, a un suelo recién labrado). Asume una superficie plana de rotura porque, dice, estas superficies son las que se observan en la práctica, y después se ocupa de la estática de las fuerzas dibujadas en la figura 7.5. Así

$$P = A\cos\alpha + W\,\text{sen}\,\alpha$$
$$Q = -A\,\text{sen}\,\alpha + W\cos\alpha \qquad (10)$$

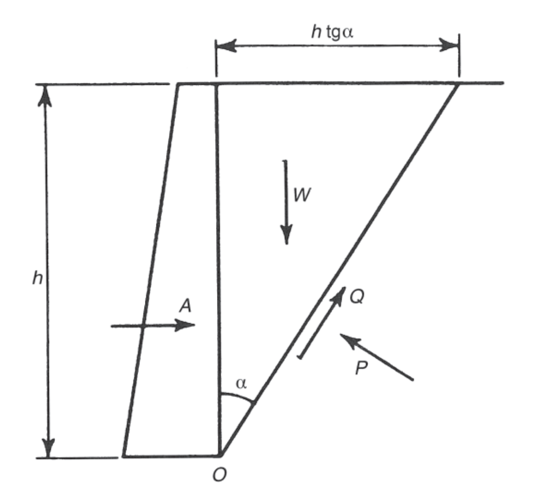


Figura 7.5
Fuerzas que actúan sobre la cuña de Coulomb en el fallo de un muro de contención

donde P y Q son las fuerzas totales que actúan sobre la superficie de rotura, y A es el empuje contra el muro de contención debido a la cuña de altura h y peso W. Falta determinar el ángulo α que define la superficie de rotura.

Para un suelo sin cohesión, $Q = P$ tg ϕ, se obtiene

$$A = W \operatorname{ctg}(\alpha + \phi) \tag{11}$$

y, señalando que $W = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}\alpha$, donde γ es el peso específico del suelo, entonces

$$A = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}(\alpha + \phi) \tag{12}$$

Coulomb sostiene, correctamente, que el valor de A se debe hacer máximo, y esto ocurre cuando

$$\alpha = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi\right) = \varsigma \tag{13}$$

de manera que

$$A_{\max} = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \varsigma \tag{14}$$

A continuación, Coulomb muestra cómo calcular el momento de vuelco en el muro de contención, lo que lleva a un método para el cálculo de ese muro.

El empuje del suelo (c, ϕ)

Coulomb repite su análisis teniendo en cuenta la cohesión. Las expresiones para P y Q de la ecuación (10) se relacionan mediante la ecuación (1) ($\tau = c + \sigma \operatorname{tg}\phi$):

$$(-A \operatorname{sen}\alpha + W\cos\alpha) = c\,(h \sec\alpha) + (A\cos\alpha + W \operatorname{sen}\alpha)\operatorname{tg}\phi \tag{15}$$

así, tras alguna manipulación (a la manera de Prony)

$$A = \left(\frac{1}{2}\gamma h^2 + ch \operatorname{ctg}\phi\right)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}(\alpha + \phi) - ch \operatorname{ctg}\phi \tag{16}$$

Se verá comparando las ecuaciones (12) y (16) que la condición para que A sea máximo es la misma tanto si el suelo tiene cohesión como si no; el valor de α lo da la ecuación (13), y

$$A_{\max} = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\varsigma - 2ch \operatorname{tg}\varsigma \tag{17}$$

El corte vertical

En una corta sección aparte, de una docena de líneas, Coulomb señala en su memoria que la ecuación (17) conduce a un resultado útil para las excavaciones. Si una zanja debe excavarse sin que los laterales sin soporte caigan, la condición $A = 0$ da la máxima profundidad de la zanja,

$$h = 4\frac{c}{\gamma}\operatorname{ctg}\varsigma \tag{18}$$

Discusión

Coulomb era consciente de que resultados como los de las ecuaciones (17) y (18) proporcionan estimaciones inseguras de los valores buscados. En términos de la teoría de la plasticidad moderna, estos resultados inseguros resultan de asumir un mecanismo de rotura; el mecanismo correcto es aquel que da el valor máximo (o mínimo, en su caso) del parámetro que se está calculando. Por lo tanto la superficie plana de rotura que define la cuña del suelo en la figura 7.5 dará un valor del empuje A, que es siempre demasiado pequeño;

para obtener A_{max} se debe variar el ángulo α. Pero Coulomb sabía que una superficie de rotura *curva* podía conducir a un resultado más crítico.

Sin embargo, como ingeniero práctico, Coulomb estaba razonablemente contento con los resultados (igual que la Academia, tanto entonces como más tarde). Como un único ejemplo, el verdadero valor del coeficiente en la ecuación (18) no es 4, sino un 5% menos, es decir, aproximadamente 3,8. Sin embargo, no hay ningún registro de ensayos realizados por Coulomb que confirme este valor.

En un nivel más profundo de la discusión, resulta que el enfoque de Coulomb implica que toda la cuña de la figura 7.5 está en estado crítico; sin embargo, esto no afecta a los resultados, basados en un mecanismo hipotético. Coulomb analiza este mecanismo escribiendo las ecuaciones estáticas para la superficie de rotura, pero en realidad esas ecuaciones de equilibrio no se pueden satisfacer en toda la cuña, un hecho que no destaca Coulomb. De hecho, Coulomb no tenía el aparato matemático necesario para hacer este tipo de análisis; la teoría general del equilibrio de tensiones fue desarrollada por Cauchy[9] en 1823.

Finalmente, a partir de esta teoría general Sokolovskii[10] desarrolló su conocido análisis de líneas de deslizamiento, que representa tal vez la exposición definitiva de una teoría de la ingeniería geotécnica, que considera el suelo como un material monofásico. Las soluciones de Sokolovskii son, como las de Coulomb, incompletas, ya que limitan la atención a la cuña, y no tienen en cuenta las condiciones en el resto de la masa de suelo. Además, si *toda* la cuña está en estado crítico, como supone Sokolovskii, esto implica que la superficie del suelo tiene una sobrecarga, y esto limita el rango de soluciones. (Es interesante que Coulomb en su *Fig. 7*, figura 7.2, muestra una sobrecarga simbólica, aunque en este caso indica simplemente el peso propio del suelo.)

La línea de investigación iniciada por Coulomb y que termina en Sokolovskii fue trastocada violentamente por Terzaghi[11] en 1943; el comportamiento de los suelos con agua muestra que el enfoque de Coulomb es un modelo general pobre para la ingeniería geotécnica. Sin embargo, sus soluciones son válidas para una amplia gama de problemas. Su ecuación para el empuje contra un muro de contención, por ejemplo, la ecuación (17), en la que un término debido a la cohesión se resta del término debido a la gravedad, bien podría llamarse «ecuación de Coulomb».

Coulomb murió en 1806; el *Éloge* oficial del Instituto lo recuerda como un físico, y no menciona sus contribuciones a la ingeniería. Sin embargo, Coulomb no fue olvidado en la *École des Ponts et Chaussées*, y el gran texto de Navier[12] de 1826 rinde un magnífico homenaje a la obra de Coulomb.

8
La camisa de fuerza de Navier

El ingeniero proyecta una estructura con un determinado propósito: un pórtico de acero que alberga una fábrica, un puente que atraviesa un río, o un pórtico para la catenaria de un tren eléctrico. Es necesario identificar los criterios de proyecto; las cargas de una grúa en el caso de la fábrica, las vibraciones inducidas por el viento en el puente colgante, o la posición precisa de la catenaria del tren, pueden ser factores críticos. Los cálculos necesarios para satisfacer estos criterios se realizan en dos pasos.

En un primer paso, la *Teoría de Estructuras* se usa para determinar la manera en que la estructura traslada las cargas. En un sistema hiperestático hay muchos caminos alternativos para las cargas; la estructura elegirá uno de ellos, que debe ser descubierto por el ingeniero. Una formulación del problema en este sentido casi implica cualidades sensoriales en la estructura; un punto de vista reforzado por ideas como, por ejemplo, la de «trabajo mínimo».

Si el ingeniero ha tenido éxito resolviendo esta primera parte del problema, pasará a la segunda etapa. La escena se desplaza de una visión global de la estructura a un examen detallado de la respuesta; por ejemplo, las fuerzas calculadas por el ingeniero que actúan en una determinada sección ¿pueden ser resistidas con seguridad por el material? Este examen se lleva a cabo en el marco de lo que se conoce como la *Resistencia de Materiales* e implica el cálculo de tensiones.

Las dos etapas son lógicamente distintas pero, en la práctica, en el cálculo elástico de una estructura hiperestática, no se pueden separar. Para determinar las fuerzas primarias es necesario conocer las propiedades de la sección; una vez conocidas estas fuerzas, se pueden asignar las propiedades de la sección. El proceso del cálculo elástico es por lo tanto circular, y se debe proceder por iteración, o siguiendo algún esquema conocido que dé lugar a una solución satisfactoria. Una vez calculadas, las tensiones deben ser verificadas en relación a los criterios dados; de hecho, hasta que en el siglo XX surgió la idea de que la información «plástica» podía ser valiosa para abordar el cálculo de las estructuras, el cálculo de las tensiones elásticas había sido la actividad principal de los proyectistas desde, digamos, 1826. Este fue el año en que Navier publicó sus *Leçons* impartidas en la École des Ponts et Chausées, que impusieron la camisa de fuerza que aún constriñe la libertad del ingeniero estructural.

La Resistencia de Materiales

Los antiguos manuales de construcción, como el que se encuentra en el libro de Ezequiel (600 a.C.), o los fragmentos conservados de los libros de las logias góticas, no se ocupan de los tres criterios estructurales modernos: resistencia, rigidez y estabilidad. Las

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Navier's straitjacket,» *Architectural Science Review* 42 (1999): 91–95. Traducción de Paula Fuentes González.

proporciones de un templo griego, o de una catedral gótica, son tales que las tensiones en la fábrica son muy bajas (comparadas con la resistencia a compresión del material); las deformaciones elásticas son despreciables en comparación con las deformaciones impuestas por el entorno (por ejemplo el asiento de las cimentaciones); y las columnas de fábrica son robustas y no hay peligro de pandeo. En su lugar, los manuales de construcción antigua y medieval contienen esencialmente reglas numéricas de proporción; estas reglas llevan a un cálculo «geométrico» de una estructura que tiene la forma correcta para soportar las cargas, y que se puede construir de cualquier tamaño (hasta, digamos, un kilómetro de altura) sin peligro.

Las estructuras modernas hacen trabajar más al material, y Galileo, en los *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* de 1638, fue el primero en estudiar la resistencia de las estructuras. Desde el comienzo ataca el cálculo «geométrico» tradicional, y muestra cómo la «ley del cuadrado-cubo» impide la construcción de grandes estructuras cuando el criterio es la resistencia. De hecho, el problema básico de Galileo es la resistencia de una viga en voladizo (figura 8.1). Galileo conoce la resistencia a tracción de una barra prismática (figura 8.2) y su objetivo es relacionar esta resistencia «absoluta» con la resistencia de la misma barra a flexión.

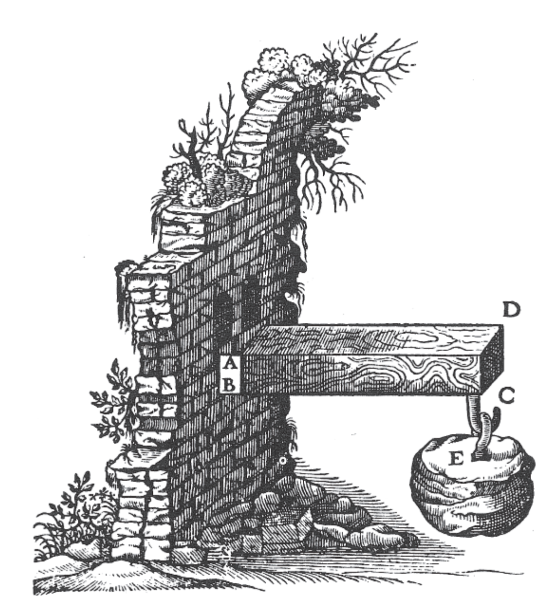


Figura 8.1
La viga en voladizo de Galileo

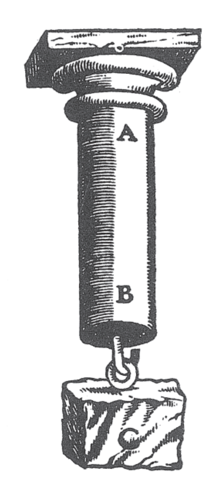


Figura 8.2
Ensayo imaginario a tracción de Galileo

Este problema pertenece al campo de la resistencia de materiales. Galileo conoce el valor del momento flector en el arranque del voladizo, y desea relacionarlo con el valor del momento resistente (último) de la barra. No tiene la noción de tensión, pero llega a la conclusión correcta de que el módulo resistente de una barra de sección rectangular es proporcional al ancho de la sección b y al cuadrado de su espesor d (y al cubo del radio en una varilla circular). Utilizando la notación moderna, obtiene que el módulo que se debe utilizar para calcular la resistencia a rotura de una viga es ½ (bd^2).

No parece que Galileo realizara ensayos para verificar su teoría, y la figura 8.2 es irreal, ya que claramente no se corresponde con un ensayo auténtico de tracción. De hecho, Galileo no fue un científico experimental, en el sentido de que parece que no ideó experimentos predictivos (se cree que no arrojó esferas de diferente peso desde la torre inclinada de Pisa). Sin embargo sí realizó observaciones, sobre las que construyó teorías brillantes; la expresión kbd^2 representa un enorme avance. Otros autores posteriores sí realizaron ensayos, y durante casi dos siglos después de Galileo hubo una gran discusión sobre el valor correcto de k en el módulo resistente. Suponiendo una ley de tensión-deformación lineal (aunque él no

lo expresó en esos términos), Parent, en 1713, demostró que el valor «correcto» de k debe ser de $^{1}/_{6}$, y no de ½ como dedujo Galileo. El trabajo de Parent pasó inadvertido, y generalmente se le atribuye a Coulomb (1773) el descubrimiento del valor del módulo resistente elástico.

Esta atribución a Coulomb es irónica en dos aspectos. En primer lugar, Coulomb no trataba de solucionar el problema elástico, sino el problema de rotura de Galileo (el valor de $^{1}/_{6}$ lo obtuvo al asumir una distribución lineal de tensiones en flexión). En segundo lugar, el propio Coulomb pensaba que el valor de $^{1}/_{6}$ era inútil para predecir la resistencia de rotura; los ensayos corroboraron los valores de Galileo de ½ para piedra y $^{1}/_{3}$ para madera. Éstos fueron los valores usados en las lecciones impartidas alrededor de 1800 en la École Polytéchnique y en la École des Ponts et Chaussées. Navier se graduó en la primera en 1804, y posteriormente estudió en la segunda; dio sus primeras clases en Ponts et Chaussées en 1819, clases que fueron la base de sus famosas *Leçons* de 1826.

En el capítulo 3 de las *Leçons* Navier trata la flexión elástica de una sección transversal, con algunos errores (la idea de los ejes principales todavía no se comprende y las tensiones de cortante todavía no se manejan correctamente; ambos errores fueron corregidos por Saint-Venant en su edición de Navier en 1864), pero la exposición es clara. En el capítulo 4 Navier pasa al problema de la fractura, y afirma que la hipótesis más sencilla, y la más parecida a la realidad, consiste en suponer que la deformación elástica más grande, tanto en tracción como en compresión, es la que rige la fractura. Señala explícitamente que su teoría de fractura está basada en el supuesto de un comportamiento elástico-lineal justo hasta el momento del fallo. Se trata de una afirmación clara de que sólo es necesario emplear cálculos elásticos para determinar la resistencia; en la práctica, por supuesto, se deben usar coeficientes de seguridad para limitar la tensión máxima.

La Teoría de Estructuras

Galileo era consciente de que una viga con tres apoyos (en términos modernos, una viga hiperestática) podía estar sometida a fuerzas no previstas por el ingeniero. Por ejemplo, una imperfección accidental como el descenso de uno de los apoyos, podía imponer fuerzas que podían llegar a romper la viga. Era igualmente consciente de que este tipo de accidentes no podían ocurrir en una viga con dos apoyos (estáticamente determinada). Galileo no se extendió sobre este aspecto del comportamiento general de las estructuras; como se ha señalado, su preocupación eran los problemas locales de fractura.

En el transcurso de los dos siglos siguientes se hicieron algunos ensayos en estructuras hiperestáticas, pero no se avanzó en la teoría correspondiente. Por ejemplo, en 1686 Mariotte ensayó vigas con los extremos empotrados, y encontró que su resistencia era el doble que la de las mismas vigas simplemente apoyadas. Del mismo modo, Girard en 1798 hizo un análisis «mecánico» de rotura de vigas doblemente empotradas y en voladizo, pero no propuso ninguna teoría general. Este era el estado rudimentario del conocimiento sobre el comportamiento estructural disponible en las Écoles a principios del siglo XIX; por otra parte esas escuelas estaban plenamente familiarizadas con las ecuaciones elásticas de flexión de Daniel Bernoulli (1741) y con la teoría de pandeo por flexión de Euler (1744). Navier recopiló todo este material y mostró cómo se podía resolver el problema general de una estructura hiperestática.

La preocupación de Navier es el cálculo de las fuerzas internas de una estructura, para poder calcular después las tensiones y realizar un proyecto elástico. Toma como ejemplo el voladizo de Galileo y lo modifica de manera que las ecuaciones de la estática ya no bastan. La carga del voladizo ya no se sitúa en el extremo, sino en un punto intermedio cualquiera (figura 8.3). El extremo del voladizo de Galileo descendería ligeramente bajo la aplicación de esta carga, sin embargo, en el voladizo modificado de Navier se impide el descenso del extremo colocando un apoyo en este punto. Si el valor de la reacción en

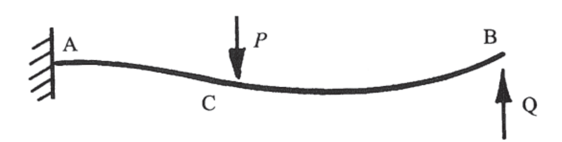


Figura 8.3
Voladizo apoyado con una redundancia

este apoyo fuera conocido, entonces se podrían calcular las fuerzas internas en la viga, pero las ecuaciones estáticas de equilibrio ya no dan suficiente información.

La solución de Navier fue una revolución en el pensamiento estructural. La reacción en el apoyo se debe a la tendencia de la viga a flectar bajo la carga, por lo tanto, es necesario introducir en el análisis alguna descripción de la forma flectada de la viga. De hecho, para obtener la solución de una estructura hiperestática se deben hacer tres tipos distintos de afirmaciones:

(a) En primer lugar se escriben las ecuaciones de equilibrio. Si estas ecuaciones son suficientes para determinar el comportamiento de la estructura, entonces la estructura es estáticamente determinada; de lo contrario, se necesitan otras dos afirmaciones.
(b) A continuación se escriben las ecuaciones elásticas que expresan las deformaciones internas de una estructura. Así, en una viga, la curvatura es proporcional al momento flector; en un elemento recto sometido a tracción, el alargamiento es proporcional al valor de la fuerza de tracción; etc.
(c) Por último, estas pequeñas deformaciones de una estructura deben satisfacer ciertas condiciones geométricas de «compatibilidad»; los distintos elementos de una estructura deben estar conectados antes y después de la deformación, y las deformaciones deben ser tales que satisfagan las posibles restricciones externas que actúan sobre la estructura.

Así, para el voladizo apoyado de Navier (figura 8.3, (a) las ecuaciones de equilibrio se pueden emplear para determinar los esfuerzos internos en la viga, pero sólo en función de la reacción desconocida en el extremo; (b) a continuación, las ecuaciones elásticas se usan para hallar la forma de la deformada de la viga, pero todavía en función de la reacción desconocida; y (c) el requisito de que la viga debe tener flecha cero en ambos extremos, y pendiente cero en el empotramiento, fija la posición de la viga en el espacio y determina el valor correcto de la reacción en el apoyo.

Navier repite este planteamiento formal en su discusión sobre un entramado compuesto por barras rectas que sólo trabajan a tracción o compresión pura. Una estructura bidimensional de dos barras articuladas entres sí en el extremo y conectadas al suelo da lugar a un sistema estáticamente determinado; una barra adicional, figura 8.4, convierte el sistema en hiperestático:

(a) Se pueden escribir dos ecuaciones de equilibrio para la carga en el nudo; pero no son suficientes para determinar los esfuerzos en las tres barras.
(b) el alargamiento elástico de las barras se puede escribir en función de las fuerzas internas en las barras.
(c) Los alargamientos de las barras deben ser tales que conduzcan a los mismos valores de desplazamiento horizontal y vertical en la unión de las barras.

Incluso para este sencillo problema, los cálculos son muy laboriosos. Se obtiene un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas, y además el análisis de la geometría de la deformación resulta complejo. De hecho, la historia de la teoría de las estructuras durante los siguientes 100 años tiene que ver con los intentos de reducir este trabajo de cálculo. Los hitos de este desarrollo son bien conocidos: Maxwell, en 1864, mostró cómo una geometría complicada podía ser sustituida por una estática más fácil con el uso (eficaz) del trabajo virtual, Maxwell y Betti (de manera más general) enunciaron el Teorema de Reciprocidad, se desarrolló la estática gráfica, Castigliano publicó sus teoremas de la energía en el año 1879, Hardy Cross ideó el método de distribución de momentos en el año 1930, se desarrolló la teoría de los modelos de ensayo, etcétera. Toda esta actividad estaba dirigida a encontrar soluciones manejables a las complejas ecuaciones de Navier, y la actividad finalizó únicamente en la década de 1950, con la invención de los ordenadores: ahora sí se podían resolver las ecuaciones complejas de una manera exacta.

Sin embargo, a pesar de que las ecuaciones del siglo XIX ya se podían resolver, no se prestó atención al hecho de que las soluciones podían no representar adecuadamente el comportamiento real de una estructura, incluso no ser representativas en absoluto.

La Teoría Plástica

Los experimentos son siempre útiles para el desarrollo de una teoría científica, particularmente en aque-

llas áreas todavía no cubiertas por la teoría. Así, el proyecto de las uniones en estructuras de acero o la disposición de las armaduras en el hormigón, son problemas complejos, susceptibles de análisis, pero clarificados en gran medida por los resultados de los ensayos. De hecho, los avances en el cálculo en estos campos, difícilmente habrían sido posibles sin la guía de los experimentos.

En el desarrollo del cuerpo principal de la teoría de estructuras no se sintió esta necesidad. La formulación de Navier, desarrollada y perfeccionada por los ingenieros del siglo XIX, era lógica y evidentemente correcta. Realizar experimentos para confirmar la teoría hubiera sido ocioso, y si hubiera habido desacuerdo entre los ensayos y la teoría, esto habría indicado simplemente que los ensayos no se habían realizado correctamente. Así, los ensayos de Mariotte en el siglo XVII sobre vigas biempotradas, que condujeron a la importante y genuina observación de que la resistencia a rotura de una viga biempotrada era el doble que la de la misma viga simplemente apoyada, no tuvieron continuación durante los siguientes 200 años. Los experimentos que se realizaron en este período fueron sobre el pandeo de columnas, y más tarde, sobre el pandeo de placas delgadas de hierro. También se investigó el problema de la resistencia de materiales, la resistencia a rotura de la viga en voladizo de Galileo, pero sólo en casos aislados se aplicaron estos resultados a las estructuras hiperestáticas. En cualquier caso, a partir de 1826 la resistencia a rotura de una estructura no era el objetivo del análisis; Navier había enunciado con claridad que la tensión máxima en una estructura no debía superar una cierta fracción de la tensión límite del material, y el objetivo del análisis estructural era la identificación de la sección más crítica de la estructura y del cálculo de la tensión elástica en esa sección.

Por ejemplo, una aplicación de la teoría simple de «Navier» conduce a que el momento flector (y por tanto las tensiones) en los extremos de una viga biempotrada bajo carga uniforme, es el doble que el momento flector en el centro de la viga. Por lo tanto los extremos de la viga son las secciones críticas. En 1914 Kazinczy ensayó en Hungría vigas de acero cuyos extremos estaban empotrados en grandes estribos. Los ensayos no se realizaron para probar o refutar la teoría, sino que tenían un fin práctico: Kazinczy quería saber si se podía considerar un empotramiento perfecto, y en caso contrario, qué grado de empotramiento podía suponerse.

Kazinczy fue cargando las vigas hasta el colapso, y parece que fue el primero en registrar la existencia de rótulas plásticas. Las dos rótulas formadas en el extremo de la viga no provocaban el fallo de la estructura: era necesaria una tercera rótula central. Por otra parte, Kazinczy concluyó que el grado de empotramiento requerido para obtener el estado de colapso era irrelevante, siempre que el empotramiento fuera lo suficientemente resistente como para permitir que se formasen las rótulas. Así, se dio una respuesta fundamental y sorprendente a la pregunta para la que se habían concebido los experimentos. Los extremos de la viga no

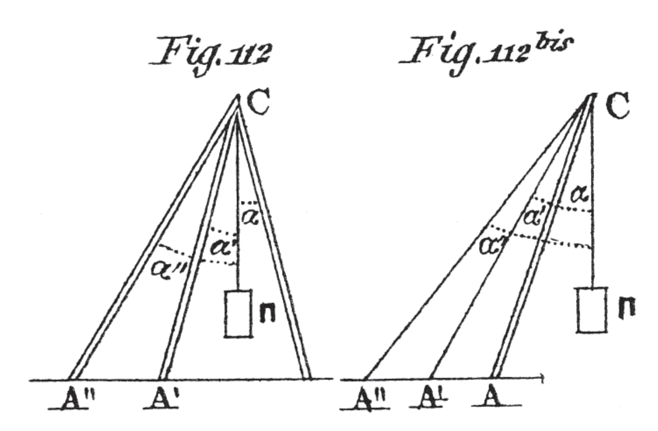


Figura 8.4
Entramado triangular hiperestático (Navier)

estaban «empotrados» en el sentido en el que habla Navier: la condición geométrica precisa de pendiente cero en los extremos de la viga se sustituye por la afirmación más vaga de que los vínculos en los extremos deben ser lo suficientemente resistentes como para que la viga pueda desarrollar toda su resistencia.

Estas ideas fueron retomadas después de la Primera Guerra Mundial, en particular en el Congreso de Berlín de 1936 de la International Association for Bridge and Structural Engineering, (IABSE). Se presentó aquí un material muy valioso que supuso un avance sustancial en el cálculo plástico de estructuras, y se formularon nuevamente y con más claridad muchos de los principios fundamentales. Por ejemplo, Maier-Leibnitz ensayó vigas continuas hasta el colapso, partiendo de muy diferentes condiciones iniciales de contorno y auto-tensiones, y encontró que la carga de colapso de todas las vigas era la misma: la resistencia final de una estructura dúctil dependía de su comportamiento plástico, y no se veía afectada por ninguna distorsión accidental o deliberada, o por cualquier otra imperfección de la construcción. Melan, además de desarrollar una teoría del comportamiento bajo carga repetida aleatoria (acomodación y colapso incremental), también dio un enunciado sencillo y potente del principio del trabajo virtual, en el que una afirmación de equilibrio y una de compatibilidad están conectadas entre sí sin ninguna referencia a las propiedades del material.

Como último ejemplo de los conocimientos alcanzados en el Congreso, F. Bleich introdujo la idea de un «factor de carga» como alternativa al coeficiente de seguridad de la resistencia. Además, en lugar de obligar al ingeniero a imaginar un hipotético aumento de la carga (por ejemplo por un factor de 2), propuso que el cálculo debía llevarse a cabo utilizando los valores de servicio de las cargas, y construir después la estructura para incorporar el factor de carga (por ejemplo, el doble de resistente de lo calculado).

Justo antes del estallido de la Segunda Guerra Mundial hubo dos avances en este sentido. El primero de ellos, en Rusia, fue inadvertido hasta que Prager llamó la atención sobre su importancia en 1948. Gvozdev había demostrado los teoremas fundamentales de la plasticidad en 1936, y sus tres condiciones repetían los tres requisitos de Navier para el análisis elástico de estructuras:

(a) Equilibrio: las resultantes de tensiones internas (por ejemplo los momentos flectores de un pórtico) deben estar en equilibrio con las cargas externas.
(b) Cedencia: las resultantes de tensiones internas no pueden superar los valores límite conocidos (por ejemplo los valores del momento plástico completo).
(c) Colapso: debe existir algún mecanismo de deformación que permita el colapso de la estructura.

Gvozdev enunció los teoremas del límite superior (o de la inseguridad) y del límite inferior (o de la seguridad), el teorema de la unicidad, y la condición de normalidad sobre la base de estos tres requisitos.

Por las mismas fechas, J. F. Baker, en Inglaterra, sin el conocimiento de estos teoremas básicos, había desarrollado un método de cálculo plástico para los pórticos. Su trabajo surgió tras siete años de experiencia como Oficial Técnico del Comité de Investigación de las Estructuras de Acero (Steel Structures Research Committee o SSRC), entre 1929 y 1936. El Comité había sido creado para desarrollar un método racional para el cálculo de estructuras de acero de acuerdo con las teorías existentes de comportamiento elástico. Se hicieron algunos avances teóricos, pero la contribución más importante del Comité reside en su trabajo experimental. Durante el decenio de 1930 se estaban construyendo nuevos edificios de acero en Londres, en los que se realizaron pruebas de carga y, aparentemente por primera vez, se midieron las tensiones en estructuras reales. Los resultados fueron complejos, pero se pueden resumir fácilmente: las tensiones reales apenas tenían relación con las calculadas por los proyectistas utilizando los métodos elásticos disponibles.

El Comité de Investigación de Estructuras de Acero no tardó en encontrar la razón: pequeños errores de fabricación y puesta en obra de una estructura hiperestática eran suficientes para invalidar los cálculos elásticos, que son extraordinariamente sensibles a las pequeñas imperfecciones geométricas o la falta de ajuste. Este es un aspecto del cálculo estructural que había sido prácticamente ignorado desde 1826; Navier supuso que los elementos de la estructura de la figura 8.4 se podían montar sin que tuvieran tensiones previas. Castigliano en 1879 estuvo a punto de analizar el problema; se dio cuenta de que la temperatura puede producir tensiones en una estructura descargada, y además mostró cómo calcular las tensiones si uno o más elementos se fabrican con longitudes

incorrectas, ambos problemas debidos a faltas iniciales de ajuste. Sin embargo, el ingeniero estructural no puede conocer previamente estos defectos de fabricación, y los extensos ejemplos de cálculo de Castigliano se llevan a cabo en estructuras perfectas.

Baker, en 1936, se puso al tanto del material del Congreso de Berlín, y en particular de los ensayos de Maier-Leibnitz sobre vigas continuas construidas deliberadamente «desajustadas», presentando todas las mismas cargas de colapso. Inmediatamente puso en marcha un programa de investigación sobre las ideas plásticas, primero en Bristol y luego en Cambridge. A pesar de la falta de recursos el progreso fue extraordinariamente rápido, y hubo una aplicación espectacular de la nueva teoría en 1941 para el proyecto del Refugio Morrison. En 1948 se permitió oficialmente en Gran Bretaña el uso del cálculo plástico en estructuras de acero; en ese mismo año los trabajos de Prager en la Universidad de Brown y los de Baker en Cambridge se unificaron, conjugando así la teoría y la práctica.

El problema del cálculo estructural

Una mesa de cuatro patas es una estructura hiperestática: sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio para determinar los valores de los esfuerzos en las cuatro patas. Una mesa de madera tradicional es normalmente robusta, y no presenta ningún problema real de diseño, aunque el uso de metal ligero o de plástico puede hacer que sea esencial tener en cuenta el material para estimar las fuerzas en las patas.

El método de Navier es claro. Se deben especificar las propiedades de flexión elástica de la superficie de la mesa, al igual que la capacidad de compresión de las patas; las deformaciones resultantes (por supuesto muy pequeñas) deben ser tales que la mesa siga siendo reconocible como mesa: se debe satisfacer la compatibilidad de deformaciones. Los cálculos son laboriosos, pero el trabajo puede ser realizado por un programa de ordenador, que puede hallar los valores definitivos y únicos de los esfuerzos en las patas.

La solución de Navier es, en cierto sentido, evidente y directa, pero la experiencia práctica (análoga a los ensayos en pórticos de acero realizados en la década de 1930) muestra que las fuerzas reales en las patas son muy diferentes de las calculadas. Una mesa robusta probablemente cojeará en el suelo firme de un café: en un momento dado una de las patas puede no tocar el suelo, y por lo tanto no soportará ninguna carga. Además, la mesa se puede mover ligeramente a una nueva posición, y una pata diferente dejará de estar en contacto con el suelo. La mesa se puede estabilizar, por ejemplo, con una cuña de corcho bajo la pata que cojea, y estaremos ante el problema típico del cálculo estructural: ¿cómo se pueden asignar las fuerzas a las patas si alguna de ellas (desconocida por el calculista) puede no estar transmitiendo carga, o estar apoyada sobre una base elástica?

Esto no es un problema real para el calculista plástico, que no se preocupa de estas condiciones de contorno desconocidas. En el momento del colapso plástico de la mesa dos o más de las cuatro patas soportarán sus «cargas de aplastamiento»; la suma de estas cuatro fuerzas en las patas debe ser igual a la carga total en la mesa (con un factor de carga adecuado). La teoría plástica, sin embargo, sólo es válida si se pueden justificar ciertas suposiciones, de las cuales la de ductilidad es la más importante. Para la mesa, hay que suponer que las patas pueden «aplastarse» sin que se produzca una descenso de la carga, y, sobre todo, que no pandean.

La importancia del pandeo como criterio de proyecto de estructuras se ha tenido en cuenta, al menos, desde la época de Euler (1744), y Navier en 1826 fue claro al respecto. Tras encontrar las fuerzas en los elementos de su estructura (figura 8.4), debían aplicarse las fórmulas de pandeo para comprobar la estabilidad. De hecho, Navier propuso que en una estructura hiperestática debían eliminarse vínculos hasta que fuera estáticamente determinada, y que esto debía hacerse de todas las formas posibles, para determinar las peores condiciones para cada elemento: en la figura 8.4 se debe eliminar cada barra para encontrar la mayor carga de compresión en un elemento en particular. Una vez más, Navier ignora el hecho de que la falta inicial de ajuste (o, en general, cualquier sistema de auto-tensión residual) puede dar lugar a valores peligrosamente altos de los esfuerzos internos.

Ambos proyectistas, elásticos y plásticos, tratarán de asegurar que no se produzca inestabilidad en sus estructuras. Incluso si la teoría del pandeo no es perfecta, es una cuestión simple disponer que, por ejemplo, un pilar de acero en un pórtico se mantenga estable en determinadas condiciones de flexión y carga axial: en cualquier caso límite, un ligero aumento en las dimensiones, con poco coste adicional, asegurará

de que el pilar no pandee. Sin embargo, es la determinación de las condiciones «reales» en el pilar la que sigue siendo complicada.

Para el proyectista elástico «de Navier» no hay ningún problema: los cálculos, o el programa de ordenador, nos dan los valores requeridos. El hecho de que estos valores son sensibles a las condiciones de contorno no será evidente. El calculista plástico será más consciente del problema, pero recibirá poca información de la teoría establecida. La estimación de las «peores» condiciones para una estructura, con el fin de que en un proyecto se pueda prevenir el pandeo, sigue siendo un área productiva para el avance del análisis estructural.

9
Los puentes de madera de Palladio

En el capítulo 5º del tercero de sus *Cuatro libros de Arquitectura* (1570), Palladio analiza la construcción de puentes de madera. Es la primera publicación en la que se describe el uso de entramados triangulados de barras para la construcción de puentes, aunque en la Columna Trajana de Roma aparece el bajorrelieve de un puente de estructura triangulada sobre el Danubio, construido por Apolodoro de Damasco hacia el año 100 d.C. En aquella época ya se empleaban entramados de madera para las techumbres, pero ningún puente de entramado ha sobrevivido.

Palladio inicia su estudio sobre los puentes de madera ilustrando una forma posible (pero no un entramado) para el puente construido por Julio César sobre el Rin, descrito por el propio César en el cuarto libro de sus *Comentarios*. El Rin es un río ancho y de corriente rápida, de modo que el problema técnico consiste en construir en el río unas pilas suficientemente seguras para apoyar los diferentes tramos. Palladio dibuja un proyecto que cree es una interpretación correcta de la descripción de César: el tablero del puente está formado por simples vigas de madera que salvan la luz entre las pilas. Palladio ya había usado con éxito este tipo de proyecto para construir un puente cerca de Vicenza (el puente se demolió poco después de la muerte de Palladio).

A continuación se muestran los proyectos de cuatro puentes que se pueden construir entre las dos orillas sin necesidad de colocar pilas en el cauce:

– un puente sobre el río Cismone, que ya no existe (figura 9.1).
– un proyecto alternativo (figura 9.2), del que Palladio no conoce ningún ejemplo en Italia, aunque supone que existen en Alemania.
– otro proyecto teórico (figura 9.3).
– el desarrollo del proyecto anterior, con perfil de arco entre las pilas (figura 9.4).

Por último, Palladio describe un puente de cinco tramos (con pilas en el cauce del río), que proyectó y construyó en Bassano del Grappa sobre el río Brenta (figura 9.5). Este puente se conserva en la actualidad, aunque ha sido reparado varias veces a lo largo de 430 años. Las luces de los tramos son pequeñas (en torno a 10 m) y no presenta la dificultad de las triangulaciones del puente de Cismone de un sólo vano (algo más de 30 m).

El puente del Cismone del Grappa

El Cismone es un río violento (dice Palladio), que desemboca en el Brenta un poco más arriba de Bassano. Cada año, los troncos que arrastraba el río destrozaban las pilas del puente; por ello, el Conde Angarano encargó a Palladio la construcción de un puente de un único vano. El proyecto resultante (figura 9.1) tiene una luz de 100 pies, y duró unos 50

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Palladio's wooden bridges,» *Architectural Research Quarterly* 4 (2000): 81–85. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

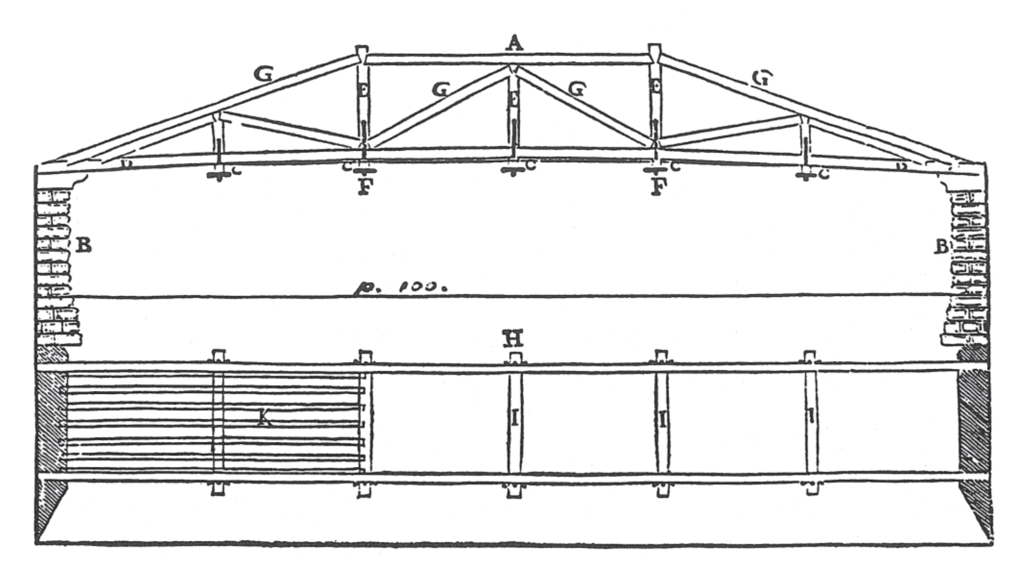


Figura 9.1
El proyecto de Palladio para el puente de Cismone supone el empleo de bridas y pasadores (*F*), descritas en el texto. El cordón inferior *DD* tiene 100 pies de largo y no puede realizarse con una única pieza; Palladio no explica cómo se construyó

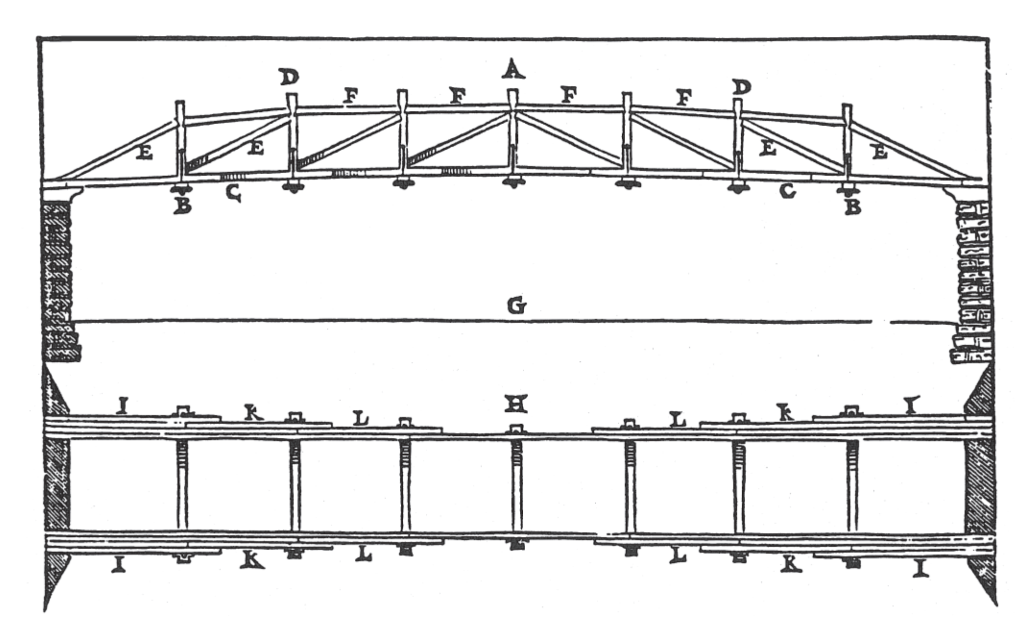


Figura 9.2
Proyecto alternativo (no ejecutado) para el puente de Cismone. El análisis del puente muestra que las fuerzas en el cordón inferior aumentan en el centro del vano aunque en la solución de Palladio se refuerzan los maderos próximos a los extremos

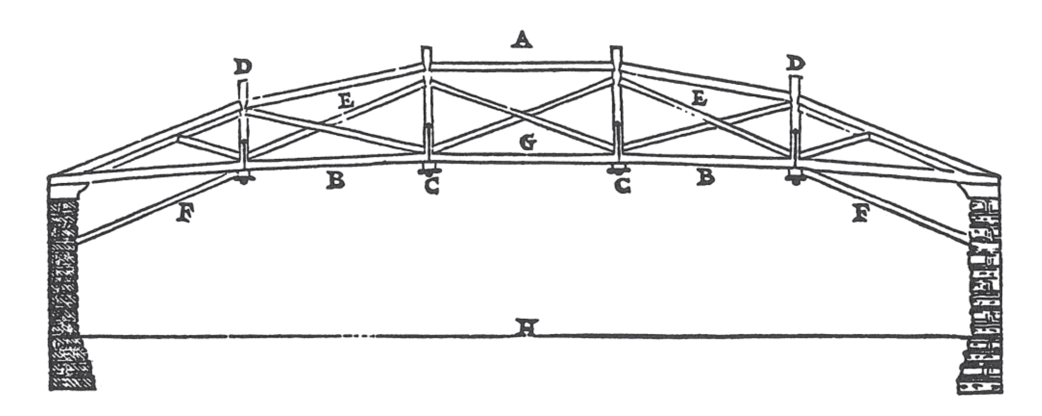


Figura 9.3
Otro proyecto no construido para el puente de Cismone. Las riostras que se cruzan indican que una pasa sobre otra, ¿o están unidas a media madera? En los arranques hay unos jabalcones *F* que contribuyen a soportar el peso del tablero

años. Las figuras 9.2, 9.3 y 9.4 muestran otros proyectos alternativos para el mismo puente que no llegaron a realizarse. En los cuatro proyectos se emplean los mismos elementos constructivos que se pueden explicar describiendo el puente realmente construido.

Todo los elementos estructurales están cortados de maderos de la misma escuadría: un pie de espesor y nueve pulgadas de ancho, 300 × 225 mm. Sin embargo, las viguetas del tablero (*K* en la figura 9.1) son bastante más pequeñas. Palladio describe con detalle la construcción del puente real (y hace lo mismo con los otros proyectos), pero deja algunos detalles sin precisar. Por ejemplo, no da ningún detalle acerca de los andamios y apeos necesarios, y estos soportes son necesarios hasta que el puente esté terminado. En la figura 9.1 se pueden ver los travesaños *I*, las vigas maestras, que se colocan en primer lugar; sobre ellas se asentará el tablero *K* del puente. Los maderos largos *D*, que forman el cordón inferior de los dos entramados triangulados, se colocan a continuación sobre las vigas maestras *I*.

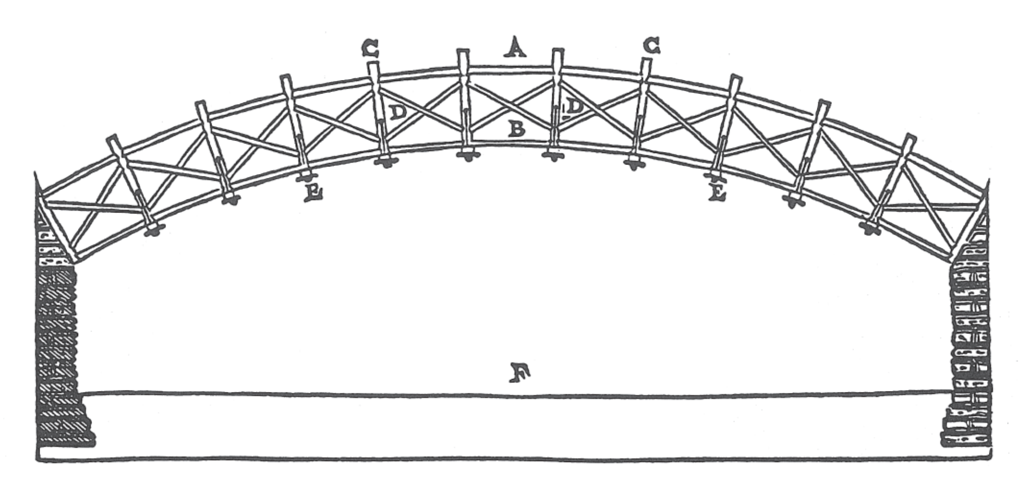


Figura 9.4
Proyecto con forma de arco para el puente de Cismone. Los recuadros están arriostrados mediante cruces de San Andrés

Seguidamente, sobre los cordones *D*, encima de las vigas *I*, se disponen los pendolones *E* (Palladio los denomina *colonnelli*, destacando el empleo de un término técnico poco habitual). A cada lado del pendolón se fijan bridas de hierro, cuyo extremo inferior atraviesa la viga maestra *I*, para quedar fijado por un pasador de hierro *F*. El puente se completa añadiendo el cordón superior *GAG* y las riostras diagonales; una vez hecho esto se pueden retirar las estructuras de soporte auxiliares.

Los proyectos alternativos

La triangulación del puente de la figura 9.1 conduce a una estructura que es, en términos convencionales, estáticamente determinada, y lo mismo ocurre con el puente de la figura 9.2 Ambos puentes están proyectados de manera que no se producen empujes horizontales en los estribos de las orillas.

Sin embargo, el puente dibujado en la figura 9.3, pese a estar construido de modo parecido, presenta

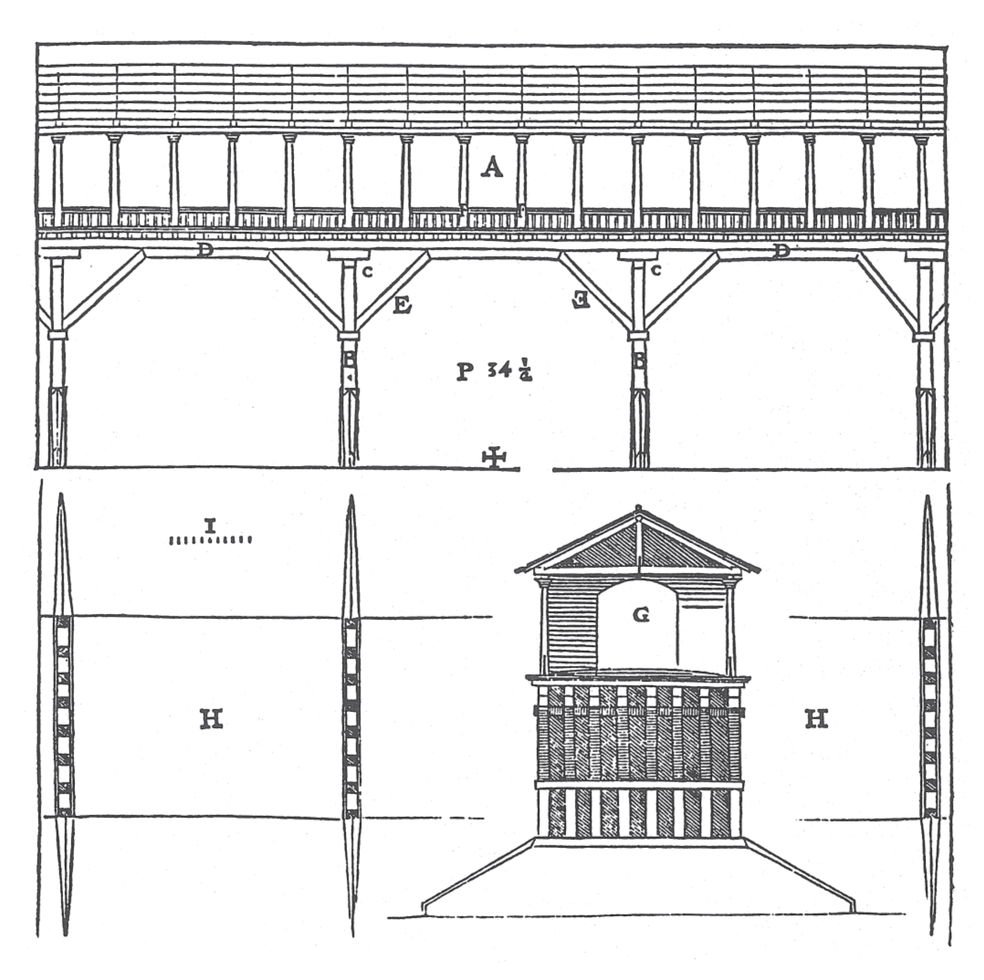


Figura 9.5
Puente de Palladio sobre el Brenta en Bassano del Grappa. Las cuatro pilas están separadas 36 pies entre sí, y el tablero del puente está formado por vigas que salvan esta distancia. Además, los jabalcones *E* permiten que se produzca efecto arco en cada tramo (compárese con la figura 9.3). El puente todavía existe

dos grandes diferencias respecto a los puentes de las figuras 9.1 y 9.2. En primer lugar, la triangulación diagonal en los tres tramos intermedios parece ser hiperestática; Zorzi (1967) denominó *croce di S. Andrea* a este arriostramiento, una equivalencia del término *croix de S. André* de Rondelet (1834). En cualquier caso, los elementos de la cruz de San Andrés están unidos de manera que pueden trabajar únicamente a compresión; en caso que un recuadro tienda a deformarse ligeramente una de las diagonales soportará la carga mientras que la otra permanece descargada, con lo que la celosía se convierte en estáticamente determinada. La segunda diferencia fundamental está en los jabalcones *F*, que son ciertamente elementos hiperestáticos; además, producen empujes sobre los estribos y, como indica Palladio, no hay duda que contribuyen considerablemente a soportar el peso del puente.

El entramado de la figura 9.3 se modifica y desarrolla en el proyecto de la figura 9.4; el sistema de uniones es exactamente el mismo, pero en este caso la estructura en su conjunto imita la de un puente en arco de fábrica, que precisa de apoyo tanto vertical como horizontal en ambas orillas. Es más, los once recuadros del puente pueden considerarse como dovelas, con los arriostramientos diagonales manteniendo rígidamente la forma de cuña de cada recuadro.

Análisis del puente de Cismone

A continuación se realiza un análisis del puente construido (figura 9.1), al tiempo que se comentará el proyecto alternativo de un entramado triangulado sencillo (figura 9.2). El puente tiene 100 pies de luz y 10 pies de ancho, con lo que la superficie en planta está en torno a 100 m^2. El peso del puente puede estimarse en unos 180 kN, si a esto añadimos una sobrecarga de uso uniformemente distribuida de 3 kN/m^2, ó 300 kN en total, entonces el peso que soporta cada una de los dos entramados es de 240 kN.

Como ha señalado Yeomans (1992), el puente de Cismone de la figura 9.1 puede entenderse como tres pequeñas armaduras simples de par, tirante y pendolón, cada uno de 10 m de luz, incluidas en otra mayor, con pares, nudillo y dos pendolones, que abarca la luz de 30 m, incluso es posible que Palladio lo interpretase de este modo. Sin embargo, independientemente de cómo se considere el puente, se trata de una estructura estáticamente determinada, y las fuerzas principales pueden calcularse de forma unívoca. Así, en un análisis estructural moderno el entramado se sustituiría por una estructura de barras con los nudos articulados, lo que permite calcular las fuerzas en las barras.

La figura 9.6 muestra el resultado de este análisis. Las vigas maestras soportan el peso del tablero, de modo que los pendolones están traccionados; la carga total de 240 kN se puede suponer como una carga de 40 kN actuando en el nudo inferior de cada recuadro. Se indican las fuerzas (kN) que actúan en cada barra, obtenidas a partir de la geometría simplificada; en realidad, las fuerzas no podrán obtenerse con ese grado de precisión. El cordón superior y las barras diagonales están comprimidas (en la figura 9.6 están dibujadas con línea gruesa). El cordón inferior está traccionado y esto da lugar a un problema cuya solución Palladio no comenta. En efecto, el cordón inferior tiene una longitud de más de 30 m, y resulta bastante improbable encontrar un madero de estas

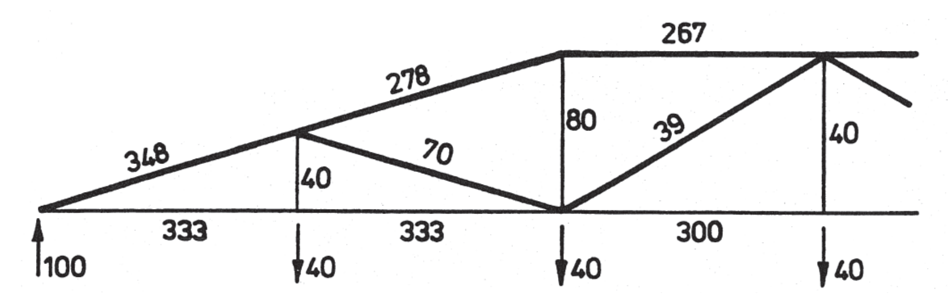


Figura 9.6
Fuerzas en las barras (kN) para el entramado de la figura 9.1; las líneas gruesas indican compresión

dimensiones. Podrían haberse conseguido tres vigas de 10 m de longitud, pero entonces se necesitarían dos ensambles de tracción.

Ciertamente, lo esencial de los entramados triangulados es que se pueden construir estructuras de grandes luces con elementos cortos. El ensamble de los elementos de madera es más sencillo para transmitir compresiones que para transmitir tracciones, y en los dibujos de Palladio se muestran empalmes a tope que transmiten empujes. Sin embargo no da ninguna indicación de cómo ensamblar las piezas del cordón inferior de las figuras 9.1 y 9.2. Como se indicó al analizar la construcción del puente, los pendolones se conectan al resto de los elementos mediante bridas de hierro; en principio, también se podrían haber empleado bridas metálicas para conectar los empalmes de tracción del cordón inferior.

Como se muestra en la figura 9.6, la fuerza más alta, bajo una carga nominal de (1,8 + 3,0) kN/m^2, es de 348 kN, y los dos maderos de 300 × 225 mm de sección que se ven en la figura 9.1, par y contrapar, se reparten esta fuerza; la tensión normal media correspondiente es de 2,6 N/mm^2. En todo caso, no está claro como están unidos los dos maderos, si es que lo están. Si se consideran completamente independientes, la pieza inferior (correspondiente a la armadura pequeña) soportaría 70 kN, y la exterior (el entramado que abarca toda la luz) soportaría 278 kN.

El siguiente elemento del cordón superior está formado por una sola pieza que soporta 278 kN, lo que supone una tensión de 4,1 N/mm^2. Se trata de un valor de tensión aceptable. La deformación de la celosía sometida a una carga total de 240 kN es de 55 mm (considerando un módulo de Young de 9 kN/mm^2); aunque la deformación inicial sería, sin duda, mayor debido a la holgura de las uniones, la rigidez general (una flecha menor que 1/500 de la luz) parece adecuada.

Hay un aspecto del proyecto, por lo menos tal como está dibujado en la figura 9.1, que no parece estar bien resuelto; no se muestra ningún arriostramiento lateral del cordón superior comprimido. Las uniones reales pueden, de hecho, suministrar una cierta rigidez lateral al entramado; un cálculo sencillo servirá para aclarar el problema. El elemento *A* de la figura 9.1, el cordón superior comprimido central, con una longitud de 10 m y una sección de 300 × 225 mm, tendría una carga crítica de Euler para extremos articulados de 250 kN, mientras que la figura 9.6 muestra que la fuerza obtenida en el análisis bajo la carga total es de 267 kN. El pendolón central y las dos riostras proporcionarían algún tipo de restricción al movimiento en el centro del elemento *A*. En cualquier caso, el puente se construyó y se mantuvo en uso al menos durante 50 años, lo que parece una vida aceptable para ese tipo de estructura.

Hay un aspecto curioso sobre el primer proyecto alternativo para el puente de Cismone (figura 9.2). En la figura 9.7 se muestran las fuerzas en las barras (a partir de un análisis de entramado de nudos articulados) para la misma carga total de 240 kN; las fuerzas son mayores que las que se muestran en la figura 9.6 porque la altura del puente es menor. Las tensiones aumentarán en la misma proporción, pero seguirán siendo aceptables, y los comentarios anteriores acerca de los tipos de unión y de la estabilidad lateral se pueden aplicar igualmente. No obstante, se puede observar en la figura 9.2 que en el cordón inferior Palladio duplica, triplica y cuadruplica la sección en algunas zonas, como si estuviese considerando el puente como dos voladizos empotrados en los estribos. El puente no puede comportarse de ese modo y,

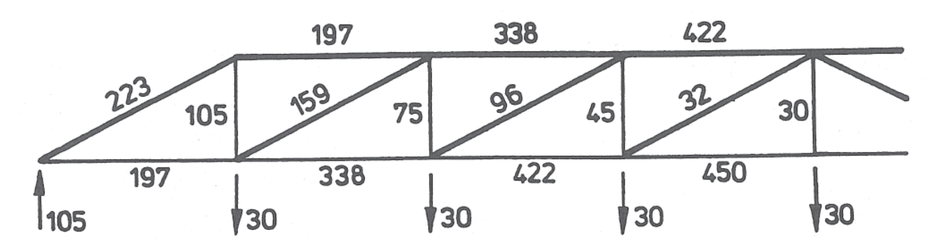


Figura 9.7
Fuerzas en las barras (kN) para el entramado de la figura 9.2; las líneas gruesas indican compresión

de hecho, se ha dibujado como simplemente apoyado en sus extremos; en el análisis recogido en la figura 9.7 se ve que las fuerzas del cordón inferior aumentan hacia el centro en lugar de reducirse. De nuevo, sería interesante saber cómo imaginaba Palladio la transmisión de las fuerzas de tracción entre los maderos del cordón inferior.

Conclusiones

Palladio era un arquitecto del Renacimiento; sin embargo el proyecto de estructuras en el siglo XVI seguía las mismas ideas que, procedentes de la antigüedad, se habían transmitido a través de la Edad Media (ver, por ejemplo Heyman 1998). No se realizaban cálculos; es más, el conocimiento matemático necesario no estuvo disponible, ni siquiera de manera rudimentaria, hasta más de cien años después de la época de Palladio. En su lugar, las reglas de proyecto estructural eran del mismo tipo que las reglas de proyecto arquitectónico empleadas por Palladio: eran reglas de proporción. Su empleo en arquitectura aseguraba la belleza renacentista; mientras que su empleo en estructuras garantizaba su estabilidad. En edificios construidos con materiales que trabajan a tensiones bajas, piedra y madera, la estabilidad depende de una geometría correcta. Son los materiales modernos, como el hierro y después el acero y el hormigón armado, los que requieren el empleo del moderno análisis estructural.

La geometría correcta de una construcción se puede obtener por un proceso de prueba y error, estudiando el comportamiento de modelos, observando otras estructuras que han demostrado un comportamiento adecuado y, por supuesto, por intuición, «sintiendo» el comportamiento estructural. La capacidad de Palladio para «sentir» el comportamiento estructural era brillante, como lo demuestran los alzados de los puentes de Cismone de las figuras 9.1 y 9.2, y el hecho de que el puente de la figura 9.1 se construyó y se comportó de modo adecuado. Palladio no llegó a construir la propuesta de la figura 9.2, con lo que no pudo comprobar su viabilidad; es más, aunque la triangulación es correcta, la percepción de Palladio sobre la importancia relativa de los distintos elementos estaba equivocada. En todo caso, y dado que las tensiones de trabajo son bajas, el proyecto hubiera funcionado.

Palladio concluye su relato de los proyectos alternativos para el puente de Cismone con la siguiente afirmación (en la traducción de Ware): «Los puentes, en estas cuatro maneras, pueden ser aumentados de tamaño si la necesidad lo requiere, regruesando todas sus partes en la misma proporción». Es una afirmación clara de la teoría medieval del proyecto proporcional de estructuras, que fue atacada por Galileo (1638) justo al comienzo de sus *Discorsi*. Galileo demostró la acción inexorable de la ley del cuadrado/cubo: si las estructuras se hacen cada vez más grandes, manteniendo sus proporciones, terminarán por colapsar bajo su propio peso.

Sin embargo, en los puentes renacentistas de Cismone las tensiones son bajas y, además, la sobrecarga de proyecto es mayor que el peso propio. Si se triplicara la luz hasta un valor, increíble, de 100 m, con los elementos agrandados en proporción, las tensiones nominales sólo crecerían un 75%. La afirmación de Palladio, aunque inaceptable, habría sido válida para sus proyectos.

10

La bóveda de abanico de la capilla de Enrique VII, Westminster

El sistema de doble cubierta de una gran iglesia gótica típica —una bóveda de piedra sobre la que hay una techumbre de madera— es decorativo y funcional al mismo tiempo. La gran pendiente del tejado exterior proporciona la protección necesaria frente a las inclemencias de los climas septentrionales (al contrario que los templos griegos, que se cubrieron con tejados de baja pendiente). En efecto, la bóveda de piedra, que probablemente está agrietada y en ningún caso se considera impermeable, necesita la protección de un tejado exterior (en Chipre, las iglesias que construyeron los Cruzados apenas necesitan estar cubiertas). Sin embargo, la madera es muy inflamable, y una de las funciones de la bóveda de piedra es formar una barrera resistente al fuego entre la techumbre exterior y la iglesia. Hay una simbiosis entre los dos sistemas; la techumbre de madera protege tanto a la bóveda de piedra como a la iglesia de las inclemencias del tiempo, mientras que la bóveda de piedra protege la iglesia del peligro de un incendio que pueda ocurrir en la techumbre de madera.

Esta protección frente al clima se hace necesaria debido a los efectos que se generan en una bóveda de piedra por los pequeños e inevitables movimientos que sufre el edificio; este artículo estudia precisamente los daños de la cubierta de fábrica. La protección frente al clima exterior no se restringe sólo a la construcción gótica —cuando Jacopo della Porta, junto a Domenico Fontana, construyó la cúpula de San Pedro de Roma proyectada por Miguel Ángel, la recubrió con plomo; del mismo modo que hizo Wren en la más externa de la triple cúpula de la catedral de San Pablo de Londres, que se trata de una construcción de madera también revestida con plomo. Las cúpulas también se agrietan, como se verá más adelante. Los daños en la construcción de piedra tienen su origen, en realidad, en las propiedades del material.

El arco de fábrica

La fábrica es un conjunto de piedras —o ladrillos, o barro secado al sol— que se ha clasificado mediante ciertas etiquetas distintivas, tales como bizantina, románica, gótica, o de adobes, pero que los ingenieros saben que presentan un comportamiento estructural común. De esta manera, se puede considerar el edificio de fábrica como un conjunto de piedras aparejadas en seco (o ladrillos, etc.), algunas de ellas bien labradas y encajadas entre sí, otras en bruto, que colocadas una sobre otra forman una estructura estable. El mortero se puede haber utilizado para rellenar los intersticios, pero habría tenido poca consistencia en un principio y puede haberse deteriorado con el tiempo: no se puede suponer que añada resistencia a la construcción. De hecho, la estabilidad del conjunto se asegura gracias a la compactación de los diversos

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «An observation of the fan vault of Henry VII Chapel, Westminster,» *Architectural Research Quarterly* 4 (2000): 357–372. Traducción de Ignacio Javier Gil crespo.

elementos bajo la acción de la gravedad; existe un estado general a compresión, pero sólo se pueden resistir tracciones pequeñas.

Las magnitudes de las tensiones de comprensión en una fábrica son muy pequeñas. Las partes más cargadas en una gran catedral presentan tensiones medias por debajo de la décima parte de la tensión de rotura a compresión del material; las tensiones de una cubierta de fábrica, ya sea la cúpula de una iglesia renacentista o una bóveda de crucería gótica, pueden alcanzar, quizá, la centésima parte de la tensión de rotura. En un ambiente de tensiones tan bajas es posible elaborar una teoría del comportamiento estructural (Heyman 1995) que se basa en tres hipótesis sencillas:

- La fábrica no tiene resistencia a tracción.
- Las tensiones son tan bajas que, en la práctica, la fábrica tiene una resistencia ilimitada a compresión.
- El fallo por deslizamiento es imposible.

El primer enunciado es claramente conservador. El segundo no lo es tanto, pero parece razonable —ciertamente, se pueden ver paramentos con desconchones y roturas parciales, pero se trata de daños locales, que no pueden acarrear la ruina completa del edificio. De igual manera hay deslizamientos ocasionales entre algunas piedras, pero la estructura de fábrica, por lo general, mantiene su forma extraordinariamente bien. Las tres suposiciones no entran en conflicto, en la práctica, con las observaciones usuales.

La manera en que se puede analizar una construcción de fábrica se puede ilustrar mediante el sencillísimo ejemplo del arco de dovelas. En la figura 10.1 se han aparejado, en seco, una serie de bloques idénticos en forma de cuña sobre una estructura auxiliar temporal (una cimbra), que después se ha retirado. ¿Cómo es capaz el arco resultante de soportar su propio peso? Robert Hooke respondió a esta pregunta en 1675 o, mejor dicho, incluyó la respuesta en un anagrama, añadido junto con otros «para rellenar el espacio vacío de la página siguiente», en su libro acerca de helioscopos. El anagrama número 3 ofrece el famoso «Ut tensio sic vis» — «Como el alargamiento, así será la fuerza»; el número 2 tiene que ver con «La verdadera forma matemática y mecánica de todos los tipos de arcos de los edificios», y el anagrama descifrado dice «Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum» —«del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido».

Hooke no dio forma matemática a este teorema (fue Gregory quién lo hizo en 1697), aunque su potente idea se puede ilustrar de una manera sencilla. La fi-

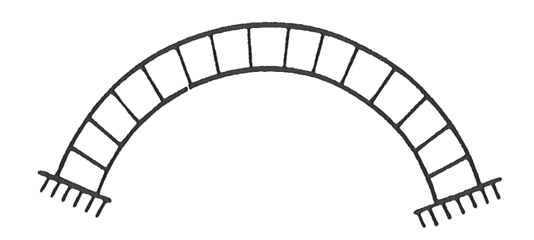


Figura 10.1
El arco de dovelas: la estructura de fábrica más sencilla

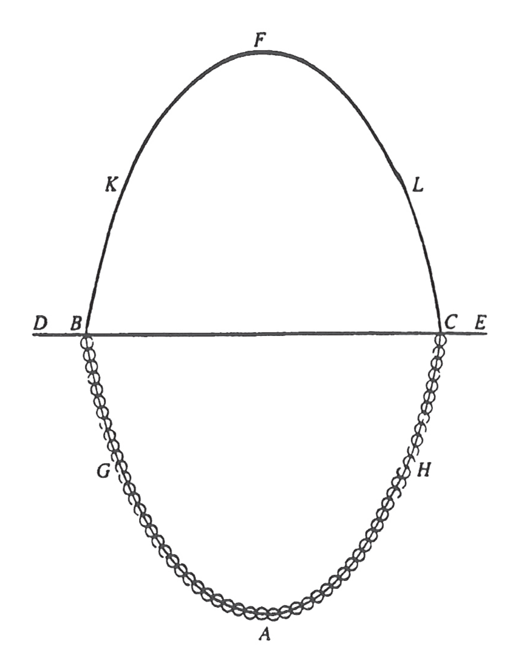


Figura 10.2
El funcionamiento mecánico del arco perfecto que trabaja a compresión es el mismo que el de la cadena colgante, que lo hace a tracción. Esta equivalencia fue bien comprendida en el siglo XVII, si bien la solución matemática no fue fácil de obtener

gura 10.2 (Poleni 1748) muestra una cuerda cargada con pesos (iguales) que, por supuesto, está en tracción; la figura de la parte superior, una reflexión especular de la cuerda, muestra la forma ideal de un arco que soporta las mismas cargas pero a compresión. Además, Gregory expuso claramente que si un arco de cualquier otra forma distinta a esta «catenaria» era estable se debía a que «es posible dibujar al menos una catenaria dentro de su espesor». La forma de la cuerda colgante (figura 10.2) se puede modificar si se acorta o alarga su longitud (o si se cambia la distancia entre los puntos de apoyo), y parece evidente que se puede encajar una catenaria de forma genérica (figura 10.2) entre el trasdós y el intradós de un arco semicircular (figura 10.1). (Resulta interesante que, para que un arco perfectamente semicircular pueda contener una catenaria invertida debe tener un espesor en torno al 10% de su radio; este espesor límite se reduce muy rápidamente a medida que se reduce la ángulo de apertura del arco, abarcando menos de un semicírculo.)

La catenaria invertida representa la *línea de empujes* del arco. Indica el camino a lo largo del cual se trasmiten las fuerzas de compresión de dovela en dovela, hasta llevarlas a los apoyos. Hay un amplio rango de posiciones posibles para la línea de empujes en el arco que se muestra en la figura 10.1; la potencia de las afirmaciones hechas por Hooke y Gregory en el XVII radica en que cualquiera de esas posiciones garantiza la estabilidad del arco: siempre que se pueda encontrar una posición de la catenaria dentro de los límites de la fábrica, entonces, la estructura es satisfactoria.

Estas ideas se pueden generalizar, y el proyecto de estructuras de fábrica, sin importar su complejidad, consiste en asignar la geometría correcta a cada unos de sus elementos. Las «líneas de empujes» representan las cargas que la estructura debe transmitir; estos empujes, en un esbelto arbotante o en una alta bóveda, deben quedar «arropados» por una fábrica con suficiente espesor para contenerlos. No hay evidencia de que los arquitectos góticos pensaran de esta forma, aunque sin embargo es cierto que las reglas medievales de construcción (así como las de Vitruvio) se ocupaban de la forma y proporciones correctas. Aunque no disponían de una representación analítica del concepto de empuje, los arquitectos de la antigüedad y de la Edad Media eran plenamente conscientes de que la construcción de fábrica necesitaba contrarrestos —los propios estribos se proyectaban con reglas numéricas de proporción.

Cuando se retira la cimbra, una vez terminado, el arco idealizado de la figura10.1 empieza inmediatamente a empujar horizontalmente sobre sus apoyos; inevitablemente, los apoyos cederán, separándose una cierta cantidad desconocida. Se produce entonces un pequeño desajuste geométrico: si el arco no se cae, debe acomodarse de alguna manera a la nueva luz, ligeramente mayor que la original. Este acomodamiento se lleva a cabo mediante la apertura de grietas, como se muestra (muy exageradamente) en la figura 10.3. Las dovelas no pueden deslizar, y tampoco se deforman, pero sí pueden girar sobre ciertos puntos de contacto del trasdós o del intradós. Las grietas resultantes pueden tener el espesor de un cabello, o incluso estar cerradas por la elasticidad de la piedra, y se pueden idealizar como articulaciones. Este tipo de grietas está siempre presente en las estructuras de fábrica. En el arco, el cedimiento de los estribos conduce a un patrón sencillo de agrietamiento; en una estructura de fábrica compleja, el asiento y apertura de las cimentaciones, el secado y retracción del mortero, impondrán ligeros cambios de forma, de manera que la estructura exhibirá un patrón de grietas complejo.

Estos agrietamientos debe considerarse como algo natural; en modo alguno son la señal de un colapso incipiente. Simplemente indican que ha habido, en algún momento, un cambio en el entorno, y que la estructura ha respondido a este cambio. De hecho, el «arco triarticulado» agrietado de la figura 10.3 es un tipo estructural bien conocido y perfectamente satisfactorio. (Cuando se pasa por debajo de un puente de fábrica es frecuente ver una grieta longitudinal en la

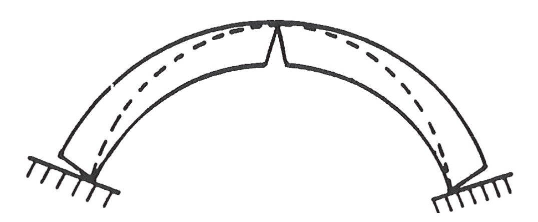


Figura 10.3
En la práctica, una estructura no asentará nunca a la perfección sobre sus apoyos. Un arco de fábrica se agrietará si los arranques se abren ligeramente. A pesar de ello, siempre será una estructura perfectamente estable

línea de clave del cañón de la bóveda, o en sus proximidades.)

Por otra parte, es fácil ver que en el arco de la figura 10.3 los empujes, que se transmiten de dovela a dovela dentro del arco, deben pasar por el trasdós en la clave y por el intradós en los apoyos. El agrietamiento provocado por la ligera apertura del arco ha definido una posición única para la catenaria invertida. El hecho de que la catenaria esté contenida dentro de los límites de la fábrica confirma que la geometría es satisfactoria; si el arco no se hunde tras el descimbrado, entonces, nunca se caerá como resultado de cualquier movimiento (pequeño) de sus apoyos.

Bóvedas de fábrica

La bóveda de cañón

Hay muchas maneras, visualmente muy diferentes, de cubrir la nave de una iglesia con una bóveda de piedra; las diferencias de forma conducen a comportamientos mecánicos distintos. La más sencilla es la bóveda de cañón, generada al trasladar longitudinalmente el arco «bidimensional» de la figura 10.1 para formar un túnel. El comportamiento de la bóveda de cañón es, de hecho, el mismo que el del arco; se puede imaginar la bóveda formada por una sucesión de arcos semicirculares paralelos. Esta idea de «cortar» una estructura en elementos más simples apenas merece comentario en el caso de la bóveda de cañón, pero es una técnica muy potente que puede emplearse para profundizar en el conocimiento del comportamiento de otras estructuras más complejas. Si se puede demostrar que una estructura, hipotéticamente cortada en formas más fáciles de analizar, permanece sin embargo estable y satisfactoria, entonces esto constituye una prueba suficiente de la estabilidad de la estructura compleja original. Esta es, de hecho, la afirmación de Hooke-Gregory: parece evidente por sí misma y, de hecho, surge de teoremas de los métodos «plásticos» modernos (Heyman 1971).

Una bóveda de cañón bien construida es una estructura satisfactoria desde el punto de vista técnico (las opiniones pueden variar desde un punto de vista estético), pero hay dos razones principales por las que no resulta económica. La primera tiene que ver con la cantidad estricta de material que se requiere; ya se ha citado la cifra del 10% del radio para el espesor del cañón semicircular. Así, una bóveda que cubre una nave de 10 m deberá tener un espesor de 500 mm, es decir, unas 500 toneladas de piedra talla-

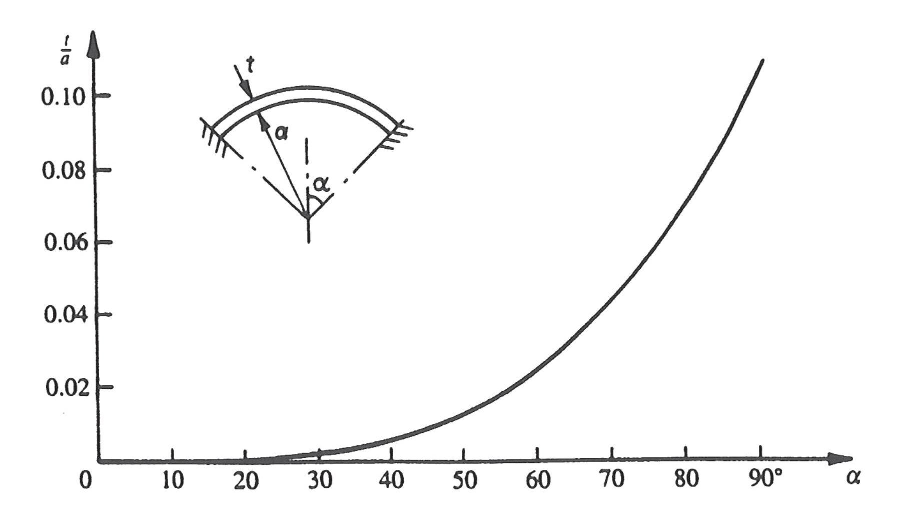


Figura 10.4
Un arco de perfil circular debe tener un cierto espesor mínimo para ser estable. Si el arco es de medio punto, la relación entre el espesor y el radio deberá estar en torno al 10 %

da para una nave de 30 m de longitud. Este peso se puede reducir; primero, empleando una fábrica de mampostería más ligera; en segundo lugar, modificando la geometría para reducir la apertura del arco, para que sea menor que la de un semicírculo completo. Este cambio en la geometría puede llevarse a cabo, por ejemplo, trasdosando los riñones de la bóveda con un relleno de mampostería o cascote, lo que reduce, de hecho, el ángulo de apertura. La figura 10.4 muestra que si este ángulo fuese, por ejemplo de $2 \times 70^{o} = 140^{o}$, entonces el espesor necesario podría ser de un 4 % del radio, unos 200 mm para la nave de 10 m. (Este macizado de los riñones es válido también para otras formas más complejas.)

La segunda dificultad, tanto económica como estructural, que presenta la construcción de una bóveda de cañón tiene que ver con la necesidad de cimbras. Hasta que la clave no cierra el arco de fábrica todo el peso de la construcción debe descansar de forma temporal en esta estructura auxiliar, y el proyecto de estas cimbras de madera ha sido siempre caro y difícil. Viollet-le-Duc (1858–68), en su *Dictionnaire* (en concreto en sus artículos «Construction» y «Voûte») profundiza en este tema y, en particular, su análisis de las técnicas romanas es revelador. Los romanos desarrollaron el empleo del hormigón en masa que se ejecutaba por tongadas en sucesivas secciones entre el esqueleto de nervios de ladrillo de la bóveda, abandonando completamente la idea de la construcción «adovelada». Sin embargo, cuando se completa el cañón y se han retirado los soportes de madera (mucho más ligeros), el resultado es una «fábrica» auténtica. El material era (y continúa siendo) muy resistente en comparación con las pequeñas tensiones de compresión; pero es poco resistente a tracción y cualquier cedimiento de los apoyos (los muros de una iglesia, por ejemplo) conduce a un agrietamiento del tipo mostrado esquemáticamente en la figura 10.3.

Es muy importante distinguir entre el comportamiento estructural real de las bóvedas de fábrica y la impresión que puede producir lo que se sabe (o se imagina) sobre su construcción. Una bóveda de cañón romana de ladrillos y hormigón en masa, con sus superficies vistas enlucidas tras su construcción, parecerá idéntica a una bóveda de cañón similar hecha con sillares, y desde el punto de vista técnico del análisis estructural, ambas bóvedas se comportarán de la misma manera. En la medida en que puedan hacerse cálculos de ambas (y estos cálculos pueden ser sorprendentemente exactos), las dos bóvedas trasmitirán los mismos empujes a sus apoyos, y responderán de la misma manera a los movimientos del entorno.

Análogamente, la plementería gótica se puede construir a la manera «francesa» o del modo «inglés» (véase, por ejemplo, Jackson 1915). Las juntas de las hiladas «a la francesa» se disponen de norte a sur y de este a oeste, mientras que las que se colocan «a la inglesa» bisecan los ángulos entre los nervios. Las «cáscaras» terminadas, enlucidas y pintadas, son visualmente indistinguibles, y tendrán el mismo comportamiento estructural básico independientemente de su construcción. Sin embargo, cuando estas bóvedas se mueven y agrietan, muestran finalmente los secretos de su construcción. Más adelante se volverá sobre el tema.

La bóveda nervada

La forma más sencilla de una bóveda de crucería resulta de la intersección perpendicular de dos cañones semicilíndricos iguales; el tramo de bóveda resultante es cuadrado y las diagonales definen la localización de las aristas. Estas aristas son una primera fuente de dificultad en la construcción de este tipo de bóveda; el corte de sus piedras debe seguir reglas geométricas precisas (estereotomía) para que encajen de forma correcta. Además, surgen nuevas dificultades si los dos cañones que se intersecan tienen luces diferentes, con lo que el tramo es rectangular y no cuadrado; además, cañones circulares de luces distintas tendrán alturas diferentes, y esto supone otra complicación más. Un primera simplificación consistió en empezar el proyecto con las aristas, construyendo después, más o menos libremente, los paños. Las aristas no quedaban definidas por la intersección de los cañones sino que el arquitecto podía, hasta cierto punto, proyectar su trazado. Los paños de la bóveda se adaptaban después para encajar en los arcos fijos del contorno.

Aún así, las aristas siguen siendo difíciles de labrar y los constructores del románico erigieron sus bóvedas levantando primero los arcos de fábrica de las diagonales del tramo. Estos arcos se embebían después, por completo o en parte, en la fábrica de los paños. Por supuesto, sólo había que dar un paso más para construir las aristas como arcos independientes, ejecutando los paños sobre su trasdós. Las uniones entre los paños

podían entonces construirse sin demasiado cuidado, ya que las juntas irregulares podían rellenarse de mortero y quedarían ocultas por los nervios.

En la figura 10.5 se muestra el esquema de una bóveda gótica (Fitchen 1961). El dibujo muestra las superficies medias de los cañones que se intersecan, tal y como las habría modelizado un moderno ingeniero o arquitecto que empleara la moderna teoría de cáscaras en el análisis de la bóveda. Ciertamente, puede usarse la teoría de cáscaras para calcular las tensiones, pero el comportamiento esencial se deriva del hecho de que la bóveda está construida por la intersección de cañones cilíndricos perpendiculares. Por supuesto, estos cañones no son cilindros *circulares*, sino que se originan por la traslación de arcos apuntados góticos que producen una superficie que es plana en una dirección y curva en la dirección perpendicular. La teoría de cáscaras indica que en la dirección «plana» sólo pueden existir tensiones pequeñas y que la acción estructural principal se da en la dirección curvada —la bóveda se comporta como si estuviese formada por series de arcos paralelos, como se dibuja en la figura 10.6.

Estos «cortes» (figura 10.6), al mismo tiempo que ofrecen una visión «segura» del comportamiento de la bóveda (por los teoremas plásticos que se remontan a Hooke-Gregory), también nos proporcionan una comprensión de gran importancia técnica. En

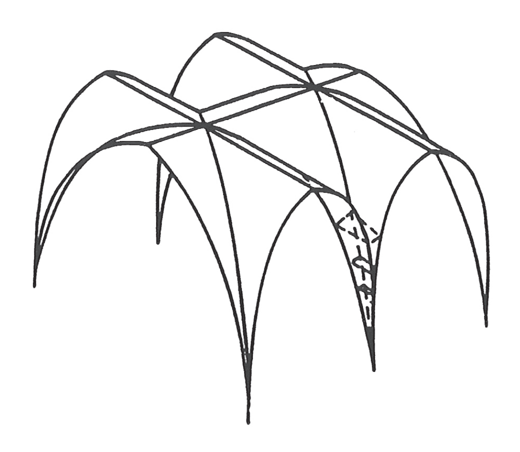


Figura 10.5
Bóveda gótica vista como una cáscara delgada (Fitchen 1961). Las superficies de la bóveda (las plementerías) presentan la curvatura principal en una dirección, ya que en la dirección perpendicular son casi rectas

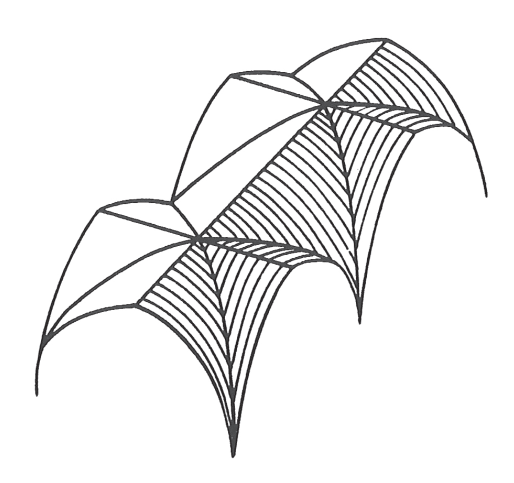


Figura 10.6
Bóveda gótica «cortada» en series de arcos paralelos, que indican el camino por el que se transmiten las fuerzas principales

primer lugar, la mayor parte de los arcos cortados abarcan mucho menos de 180 º, excepto cerca de los extremos, y en los extremos estos arcos empujan contra el relleno de los senos de la bóveda (figura 10.5), prácticamente siempre presentes en la construcción gótica; aquí, de nuevo, los arcos no alcanzan su luz completa. Así, como puede verse en la gráfica de la figura 10.4 (aunque es para el arco circular y no para el apuntado), el espesor de la bóveda se puede reducir mucho y, de hecho, el espesor típico de las bóvedas del alto gótico está entre 200 y 300 mm. Hay, por tanto, un ahorro directo de material no sólo para la bóveda de fábrica, sino también para la cimbra temporal necesaria en su construcción.

Sin embargo, es posible un ahorro mucho mayor en las cimbras necesarias para una bóveda de crucería, si se compara con las de una bóveda de cañón. Los nervios diagonales, que se levantan en primer lugar en la construcción de una bóveda de crucería, sí necesitan un apoyo; los arcos (figura 10.6) que apoyan sobre el trasdós de estos nervios, pueden también construirse utilizando sólamente un andamiaje temporal. Una vez que los nervios se han construido como arcos que apoyan de forma independiente, entonces, los paños de la bóveda pueden rellenarse casi «al aire», sin cimbra.

La bóveda de crucería, por tanto, concentra las fuerzas en las aristas, ya estén reforzadas o no con

nervios. Los romanos entendieron la construcción de este tipo de bóvedas. La Basílica de Majencio, hecha con hormigón en el año 30 d. C., tiene una luz de más de 25 m. Estas bóvedas sólo necesitan apoyo en sus esquinas, por lo que se pueden abrir ventanas en los muros laterales, como las que hay en las paredes norte y sur del cuerpo de luces de una iglesia gótica.

Mientras que los nervios emergen como los elementos estructurales que soportan la bóveda gótica, no son, paradójicamente, estrictamente necesarios. En Reims, los nervios parecen muy pequeños, y también tenemos el ejemplo de Longpont, Aisne, donde, aunque se cayeron los nervios, la plementería de la bóveda siguió en pie. El hecho es que las tensiones principales de la bóveda, que vienen a ser de una centésima parte de la tensión de rotura del material, varían suavemente si la curvatura de la superficie varía con suavidad, pero crecen notablemente si la superficie presenta algún «pliegue». Así, si la figura 10.5 representa una bóveda de arista, las tensiones en los paños aumentarán bruscamente en la proximidad de los profundos pliegues diagonales en las aristas, alcanzando, quizá, la décima parte de la tensión de rotura. Este nivel de tensiones no tiene por qué incomodar al material de la arista; si la bóveda se construyó originalmente con nervios, y estos se caen, es muy posible que las cargas se transmitan a las propias aristas.

Por tanto, el nervio constituye un refuerzo muy necesario, pero no imprescindible, en la unión de dos superficies de bóveda, como sucede en las aristas. Permite disponer los paños de la bóveda con cierta flexibilidad geométrica, supone un ahorro considerable en cimbras y andamios, y cubre las difíciles juntas entre las superficies de la bóveda. Por último, el nervio define visualmente la forma de la bóveda, y todas estas funciones se pueden considerar como la «función» del nervio.

No obstante, la necesidad de refuerzo estructural en un pliegue es de suma importancia. Esta afirmación se puede invertir: si los nervios se aplican a superficies de curvaturas continuas, entonces, son decorativos. Así, los arcos transversales principales que dividen las bóvedas cuatripartitas de la nave de una iglesia que, por lo general, separan superficies al mismo nivel, dividen la nave en tramos rectangulares, pero no ayudan a soportar las bóvedas. De forma similar, se podrían eliminar terceletes y ligaduras dejando las bóvedas estructuralmente intactas.

La cúpula

La característica técnica de una sencilla bóveda de cañón es que su superficie es *desarrollable.* Esto significa que se puede doblar una hoja de papel (y darle un apuntamiento gótico en la clave) para formar un túnel con este perfil. De forma similar, se puede suspender una lámina flexible de fábrica, a la manera de la cadena de Hooke, para obtener el mismo túnel pero invertido.

La superficie de una cúpula no es desarrollable — no se puede desplegar y convertirse en una lámina plana sin ser cortada. La forma más sencilla de cúpula es la cáscara de revolución, en la que una línea bidimensional que representa un arco gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Cada sección horizontal de esta cáscara es una circunferencia, mientras que cada corte vertical que pase por el eje tiene la forma del arco original (un huevo de gallina es una cáscara de este tipo). Así, cualquier punto de la superficie de una cúpula presenta dos curvaturas, la curvatura dada por la revolución y la curvatura del arco generatriz.

Cuando las cargas actúan sobre la superficie de la cáscara (su peso propio o, quizá, la carga de nieve), ésta debe resistirlas mediante fuerzas que actúen dentro de su superficie, de la misma manera que, en el empuje del arco bidimensional debe estar contenido dentro su espesor. La cadena colgante de Hooke no tiene rigidez a flexión, y adoptará una única forma cuando sobre ella actúen unas cargas determinadas. Por el contrario, la membrana flexible colgante puede soportar un amplio rango de cargas sin alterar su forma básica (por supuesto, siempre y cuando, ninguna de las fuerzas internas sea de compresión, en cuyo caso se producirían arrugas en la superficie). Esta «rigidez» de la membrana flexible surge de su capacidad para trasladar las fuerzas en dos direcciones.

En la figura 10.7 se ha dibujado una cúpula y se ha cortado un elemento pequeño mediante planos meridianos y paralelos muy próximos. Este elemento se muestra en la figura 10.8 y puede verse que las tensiones actúan tanto en la dirección de los meridianos como en la de los paralelos para equilibrar el peso propio del elemento. Se pueden calcular los valores de estas tensiones para una cúpula de cualquier forma; los resultados son particularmente sencillos si la cúpula es semiesférica. Las tensiones en la dirección

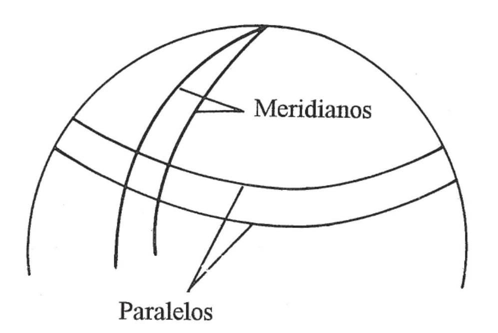


Figura 10.7
La cúpula presenta curvaturas en dos direcciones (en contraste con la bóveda gótica, que es plana en una dirección) —las tensiones en la cúpula se dan en ambas direcciones

de los meridianos son siempre de compresión, mientras que las tensiones según los paralelos son de compresión cerca de la clave, pero se vuelven de tracción a una distancia angular justo por debajo de los 50º medidos a partir de la clave. Los resultados teóricos se muestran gráficamente en la figura 10.9.

Por supuesto, las tensiones de tracción son inadmisibles de acuerdo con las hipótesis hechas sobre el comportamiento de la fábrica. A partir de la figura 10.9 se puede deducir que una cúpula semiesférica de un espesor infinitesimalmente pequeño sería capaz de soportar su propio peso si su ángulo de apertura fuese menor que unos 2 (50) = 100º. En cúpulas con una apertura mayor, se necesita un espesor finito para permitir que la superficie de empujes se «desvíe» de la forma semiesférica. En la figura 10.10 se especifican los espesores mínimos necesarios (compárese con la figura 10.4 para el arco bidimensional); una semiesfera (α = 90º) requiere un espesor de un 4,2 % del radio.

La capacidad de soportar tensiones en las dos direcciones que presenta una cáscara, por ejemplo una cúpula, se traduce en una gran economía de material cuando se compara con un arco, o una bóveda de cañón, que cubren la misma luz. Además, se produce un inmenso ahorro en las cimbras. Como ya se ha señalado, mientras que las primeras dovelas en un arco no necesitan soporte, cuando la construcción se empieza a alejar de la vertical, hay que emplear una cimbra para soportar las dovelas hasta que se coloca la clave. Por el contrario, una vez que se ha completado una hilada circular de la fábrica de una cúpula, ésta será estable sin necesidad de ningún soporte adicional; la hilada se soporta por debajo con fuerzas meridianas, y no puede caerse hacia dentro debido a constricciones geométricas que generan esfuerzos

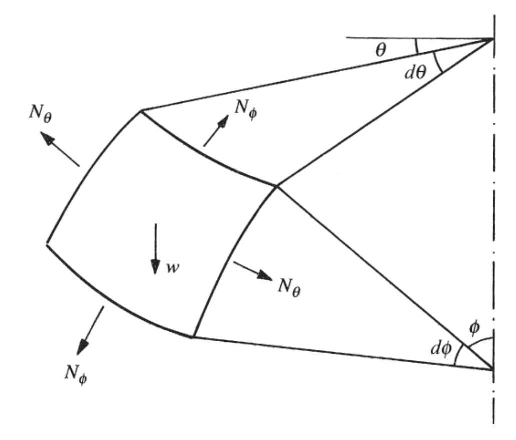


Figura 10.8
Resultantes de tensiones que actúan en un pequeño elemento de cúpula

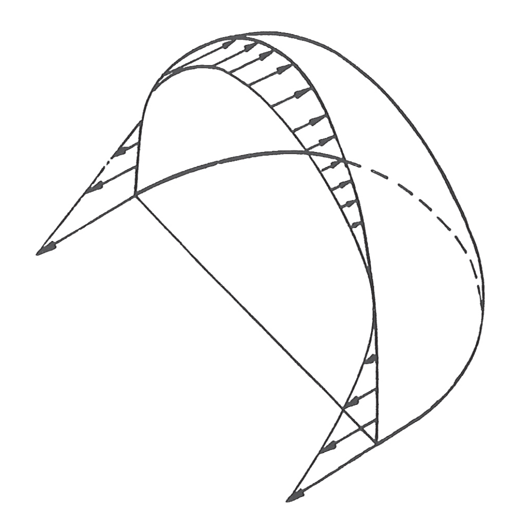


Figura 10.9
Teoría mecánica de la «membrana» para una semiesfera. Se puede apreciar que las tensiones anulares son de compresión en la proximidad de la clave, pero se vuelven de tracción bruscamente a medida que se acercan a la base. Las tensiones de tracción son inadmisibles para las fábricas

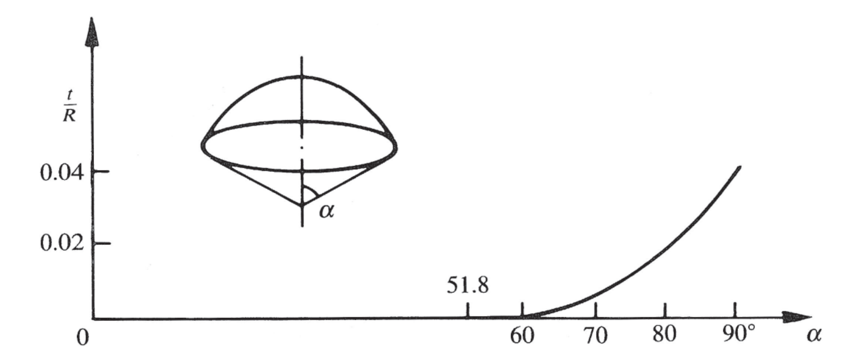


Figura 10.10
Las tensiones de una cúpula se pueden mantener a compresión siempre que tenga un determinado espesor mínimo. Una semicúpula debería presentar un espesor un poco mayor del 4% de su radio

anulares. Así, se puede construir una cúpula prácticamente sin cimbras —sólo necesita soporte la hilada que está en construcción. (Nadie creyó a Brunelleschi en Florencia cuando en 1407 afirmó que podía levantar la cúpula sin cimbras. Tampoco le creía nadie en 1418, pero, sin embargo, se le confió la obra. La cúpula de Santa Maria del Fiore es una cúpula poligonal de ocho paños y no una cúpula de revolución; no obstante, se pueden aplicar las mismas consideraciones generales.)

De hecho, una cúpula puede quedar «incompleta» —se puede omitir la coronación, de manera que se abre un «óculo» hacia el cielo, como en el Panteón de Roma (hecho de hormigón). Por otro lado, se puede cargar sobre la coronación una pesada linterna (más de 500 toneladas en Santa María del Fiore, según Parsons 1939) sin que constituya ningún peligro. La cáscara interior de la triple cúpula de la catedral de San Pablo de Wren presenta un óculo abierto; la cúpula cónica central es de ladrillo y piedra y soporta la linterna; la cúpula exterior visible es una estructura de madera con un recubrimiento de plomo.

Las tumbas micénicas en falsa bóveda pudieron haberse construido sin ninguna estructura auxiliar. Cada hilada de fábrica (que disminuye su diámetro respecto a la anterior) se asienta volando sobre la hilada inferior; los lechos son horizontales de manera que cada piedra sería estable una vez asentada. Una vez terminado el anillo, sería capaz de soportar cualesquiera tensiones anulares procedentes de la siguiente hilada en construcción. De nuevo, se debe diferenciar el comportamiento estructural del conocimiento de la técnica de construcción; la tumba con su cúpula completa y sus juntas horizontales, y la cúpula renacentista con sus juntas radiales (así como la cúpula de hormigón en masa del Panteón) se pueden estudiar con las mismas ecuaciones estructurales.

La bóveda de abanico

En 1842, Robert Willis estudió en profundidad la construcción de las bóvedas góticas, entre ellas las de abanico; Howard clasificó las bóvedas de abanico (figuras 10.11(b)-(d)) en un extenso artículo de 1911 y, más recientemente, en 1980, Leedy ha publicado un catálogo completo, con comentarios detallados, de las principales bóvedas de abanico construidas hasta 1540. El dibujo de Howard, figura 10.11(b), muestra la bóveda de abanico de *nervios y plementos*, cuya característica esencial es que todos los nervios tienen la misma curvatura, por lo que el abanico es un conoide. El dibujo de Leedy (figura 10.12) muestra la articulación de estas cáscaras conoidales en un sistema que permite cubrir una iglesia; como se puede ver, los conoides están separados y el espacio restante se rellena con un tímpano de fábrica. Se pueden realizar otros ajustes geométricos. Así, la figura 10.13 (de Howard) muestra un tramo cuadrangular de bóveda en el que los conoides se intersecan; las bóvedas de la capilla del King's College de Cambridge, donde los tramos son rectangulares en vez de cuadrados, pertenece a este tipo.

Estén o no los conoides completos, la figura 10.12 muestra una sucesión de ejes de rotación a ambos lados de la iglesia. Por el contrario, la construcción de cúpulas implica un eje único de rotación centrado en el crucero, o una sucesión de ejes en el centro de la nave y la cabecera si éstos también se cubren con bóvedas cupuliformes (por ejemplo, en la catedral de San Pablo). Por otra parte, a partir de la figura 10.12, resulta evidente que se precisan grandes cimbras para la construcción de los conoides de las bóvedas de abanico; las cáscaras de estas bóvedas no son autoportantes, sino que necesitan de los tímpanos de fábrica, que actúan como «claves», para conseguir la estabilidad. De hecho, las cimbras para las bóvedas de abanico era tan costosas que en el contrato de 1512 para la capilla del King's College se permitió el empleo de los andamios del propio College —John Wastell y Harry Semerk pudieron usar dos tramos del «gran andamio» que se encontraba al final de la nave (Willis y Clark 1886).

La característica técnica de una cáscara en bóveda de abanico es que presenta una «curvatura gaussia-

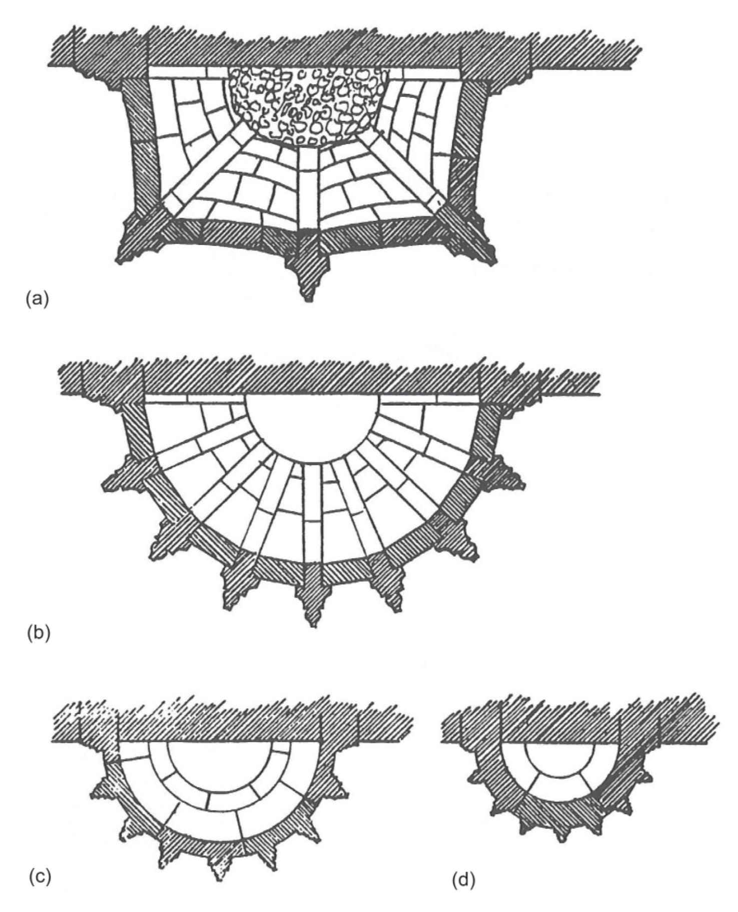


Figura 10.11
Clasificación de las bóvedas de abanico según Howard (1911). Todos los nervios de cada bóveda tienen la misma forma, por lo que cada bóveda de abanico es un sólido de revolución: a) bóveda cuatripartita (como comparación); b) bóveda de abanico construida mediante nervios y plementos independientes; c) bóveda de abanico con los nervios labrados en los sillares; d) bóveda de abanico con nervios decorativos

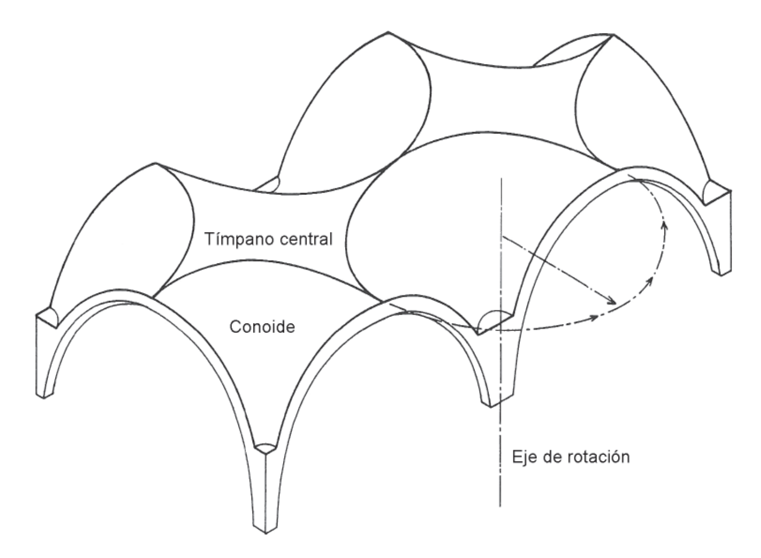


Figura 10.12
Dibujo esquemático de una bóveda de abanico como una sucesión de cáscaras conoidales. Los conoides tienen curvatura en dos direcciones

na» negativa. Ya se ha dicho que una cúpula tiene dos radios de curvatura en cualquier punto sobre la cáscara, un radio procede de la forma de la curva generatriz inicial y el otro de la rotación. Para un observador situado en el suelo bajo una cúpula, estas dos curvaturas tienen el mismo signo. Por el contrario, una bóveda de abanico tiene una curvatura positiva y otra negativa en cada punto, tal como se aprecia en el dibujo de un pequeño elemento de cáscara en la figura 10.14 (véase la figura 10.8 referente a las cúpulas). Como en la cúpula, puede haber tensiones en las dos direcciones de la cáscara.

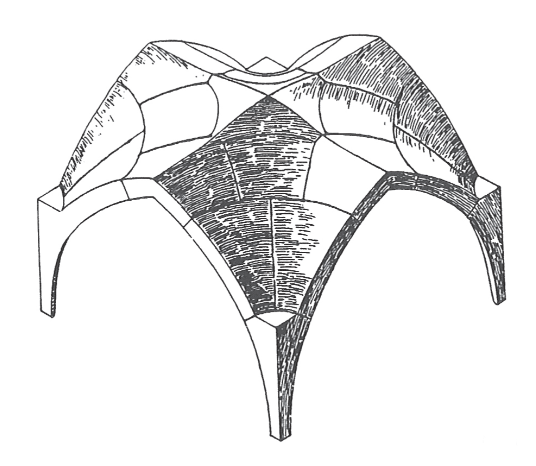


Figura 10.13
Una bóveda de abanico con conoides que se intersecan (Howard 1911)

El agrietamiento de las bóvedas

Las grietas que aparecen en las estructuras de fábrica son el resultado de movimientos del entorno —ya se ha visto antes (figura 10.3) que si los apoyos de un arco ceden se formarán grietas de articulación. La figura 10.15 reproduce un dibujo de Pol Abraham (1934) sobre las grietas típicas que se pueden ver en las bóvedas nervadas cuatripartitas. Las grietas discurren en dirección este-oeste, a lo largo de la nave; las que están en o cerca del espinazo de la bóveda se corresponden (como se verá) con la articulación central del arco (figura 10.3). Además, pueden verse grietas paralelas a los muros en los paños de las bóvedas; estas grietas suponen una separación completa de la bóveda, hasta el punto de que desde arriba se puede ver el suelo de la iglesia. Normalmente estas

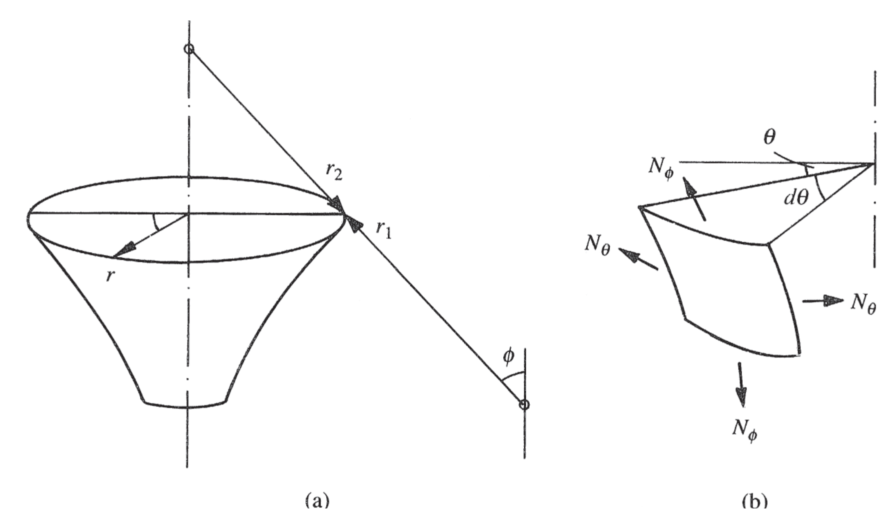


Figura 10.14
Cáscara de una bóveda de abanico completa: a) geometría; b) un elemento pequeño

grietas se forman a una distancia de alrededor de un metro, o algo más, a partir de los muros. Por último, puede haber grietas de separación entre las plementerías y los muros norte y sur.

Las grietas de articulación son fáciles de interpretar. En la figura 10.16 se muestra la sección transversal de una bóveda de cañón uniforme, dibujada aproximadamente a escala (por ejemplo, un espesor de 300 mm para una bóveda de unos 12 m de luz). Este arco es demasiado delgado para trasladar correctamente su peso propio hasta los arranques. Ahora bien, los rellenos de mampostería que trasdosan los riñones permiten que los empujes escapen del espesor de la bóveda y se transmitan al sistema de contrarresto. En la figura 10.16(b), se supone que el contrarresto ha cedido ligeramente de manera que se han formado tres articulaciones. La grieta próxima a la coronación es la única que se verá desde el interior de la iglesia. Hay que señalar que las grietas se formarán en los puntos más débiles de la fábrica, esto es, en las juntas de mortero que hay entre las piedras en lugar de atravesar las propias piedras. La bóveda de la figura 10.15 tiene un aparejo «a la francesa»; cuando la bóveda está enlucida con cal, las líneas de agrietamiento revelarán el modo de construcción.

La figura 10.17 muestra un tramo de una bóveda cuatripartita formada por la intersección de dos cañones

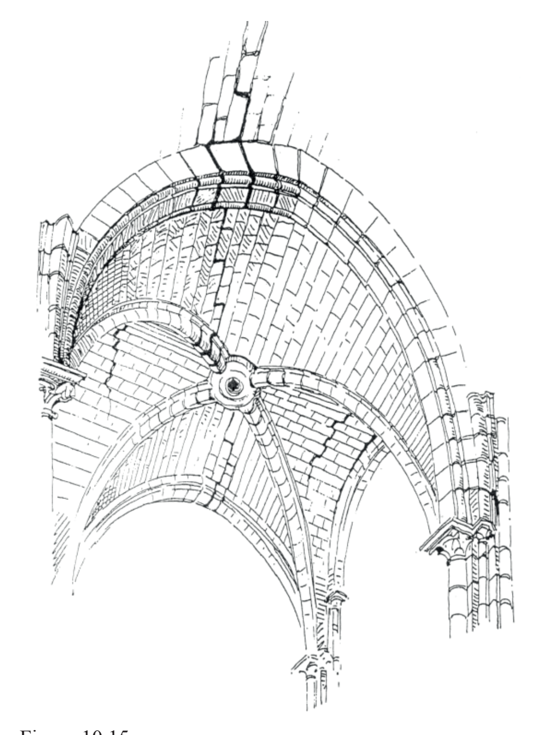


Figura 10.15
Agrietamientos habituales en las bóvedas góticas (Abraham 1934). Algunas de las grietas actúan como «articulaciones», mientras que otras suponen una separación total de la fábrica

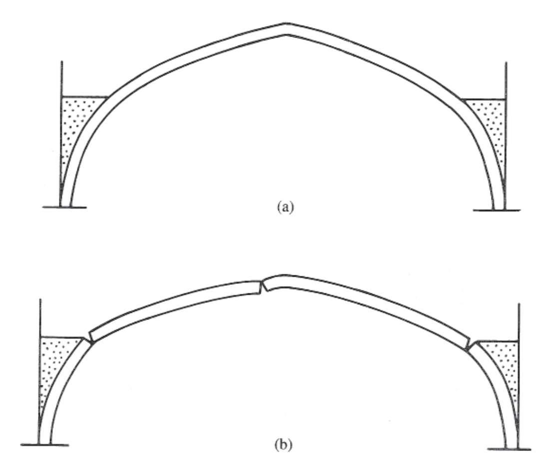


Figura 10.16
Agrietamiento en una bóveda de cañón causado por un cedimiento del sistema de contrarresto (véase la figura 10.3)

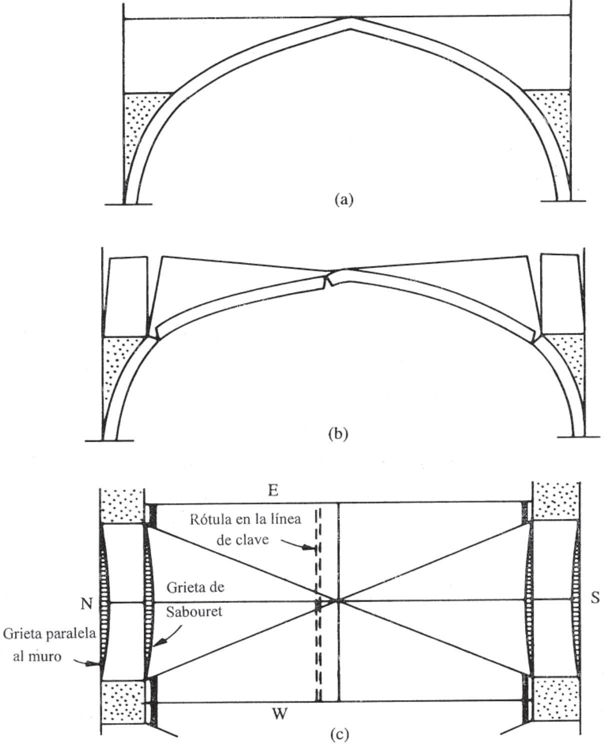


Figura 10.17
Patrón de agrietamiento en una bóveda cuatripartita gótica (véase la figura 10.15). Los bordes de la bóveda han quedado aislados por las grietas de «Sabouret»: a) sección transversal tal como fue construida; b) agrietamiento visto en sección; c) agrietamiento visto en planta

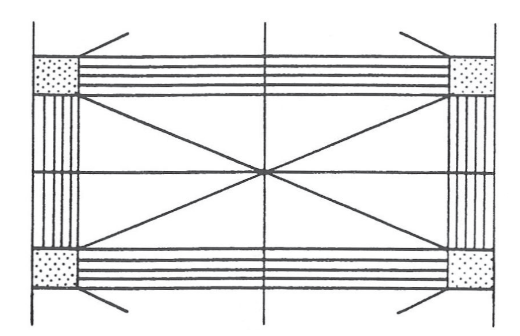


Figura 10.18
Planta esquemática de un tramo de bóveda gótica [cf. fig. 10.17 (c)]. Los bordes de la bóveda funcionan como arcos independientes

apuntados. En el alzado (figura 10.17 a) se puede ver el relleno situado de los senos de la bóveda, que permite la transmisión de los empujes de la bóveda hacia el sistema de contrarresto exterior (que pasará por los arbotantes si hay que salvar las naves laterales). Si los estribos ceden, la bóveda en dirección este-oeste desarrollará el patrón de agrietamiento de la figura 10.16(b). Como se ha visto antes, estas articulaciones hacen descender la clave de la bóveda, y el «arco» de la bóveda se acomodará al incremento de la luz.

Sin embargo, el cañón de la bóveda que discurre en dirección norte-sur no tiene suficiente material en su coronación recta para acomodarse al incremento de la luz. Como se muestra en la figura 10.17(c), se abrirán grietas de separación (Sabouret clasificó en 1928 algunas de estas grietas). Los extremos norte y sur de la bóveda se han transformado por efecto de las grietas en arcos sencillos de un metro o más de ancho. En principio, podrían abrirse grietas semejantes en la dirección perpendicular, es decir, en el cañón este-oeste de la bóveda. Sin embargo, los tramos consecutivos se contrarrestan entre sí en esta dirección impidiendo el incremento de la luz que es el origen de las grietas. En el crucero se producen algunos problemas particulares; en el extremo occidental, la nave es por lo general lo suficientemente masiva como para contener el movimiento del último tramo de la bóveda. La cabecera oriental de la iglesia suele ser menos robusta, y con frecuencia se ve una grieta de separación en la bóveda principal sobre la ventana de la fachada.

Así, el comportamiento «estructural» de un tramo de una bóveda cuatripartita puede imaginarse como se muestra en la figura 10.18, con sus bordes funcionando como arcos bidimensionales. El dibujo de la figura 10.6, con la bóveda completamente cortada en arcos elementales, se presenta entonces como ineludible y, de hecho, proporciona un buen entendimiento del funcionamiento básico de este tipo de bóvedas.

De la misma manera, las grietas que se observan en las cúpulas de fábrica dan una buena idea de la manera en que se transmiten las fuerzas. La figura 10.19 muestra, muy exagerado, el modo en que una cúpula se agrieta en el caso de que la estructura que la soporta (semicúpulas o arcos de contrarresto, por ejemplo) haya cedido ligeramente. Grietas meridianas de este tipo pueden verse en la realidad, por ejemplo en el Panteón de Roma, y fue el agrietamiento de la cúpula de San Pedro de Roma lo que condujo a los peritajes del siglo XVIII y al estudio de Poleni de 1743. Es evidente que si una cúpula está agrietada realmente, como se indica en la figura 10.19, entonces no cabe la posibilidad de que aparezcan tensiones anulares. Para su análisis, Poleni consideró la cúpula dividida en un gran número de arcos cortando por planos meridianos —si los gajos resultantes son estables, entonces la cúpula agrietada también será estable. Este profundo y correcto análisis quedó confirmado por sus ensayos —la línea de empujes estaba contenida dentro de la fábrica de la cúpula.

Aunque una bóveda de abanico no se agrieta de la misma manera que una cúpula, esto es, con el equivalente a las grietas meridianas, sin embargo, el mé-

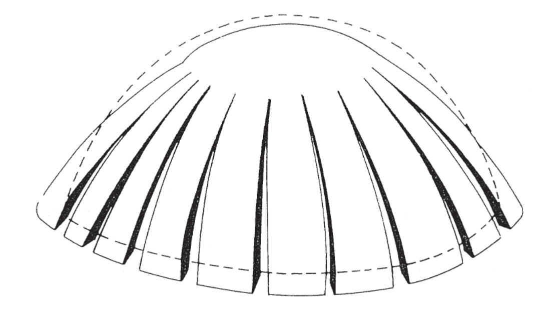


Figura 10.19
Dibujo esquemático del agrietamiento de una cúpula (muy exagerado)

todo de los cortes conduce a una buena comprensión del modo en que se transmiten las fuerzas. De hecho, en 1840, Mackenzie identificó la bóveda de abanico de la capilla del King's College como un conoide cóncavo invertido; la figura 10.20 reproduce un trozo, en donde se han añadido unas líneas de trazo más grueso. Mackenzie estudió el problema desde el punto de vista de la construcción, y señaló que se podía construir un abanico invertido si el anillo inferior de piedras tenía impedido su movimiento (en un abanico real, el borde superior debe estar «precomprimido», tanto por la intersección con los sucesivos abanicos que se apoyan entre sí, como por los pesados tímpanos de fábrica, con claves, situados en el espinazo de la bóveda). Las líneas de trazo más grueso de la figura 10.20 representan las cadenas colgantes de Hooke; la bóveda se ha dividido en rebanadas casi bidimensionales, y se puede suponer que las fuerzas se transmiten a tracción a lo largo de estas líneas. En la bóveda real, estas fuerzas serán de compresión y no habrá fuerzas anulares. El conoide completo se puede dividir, entonces, en los cuartos que en la realidad forman la bóveda de la capilla del King's College (o, más bien, los cuartos están cortados en los extremos por los tramos rectangulares); la bóveda de abanico trasmitirá su empuje en el punto donde se encuentran las líneas gruesas de la figura 10.20, de manera que no hay fuerzas en los bordes de los abanicos situados sobre las ventanas.

De hecho puede observarse que los abanicos de la capilla del King's College están separados de los muros laterales por grietas (un buen mantenimiento ha rellenado estas grietas con mortero). El empuje de los abanicos se trasmite a los enormes contrafuertes exteriores, que han cedido ligeramente llevando al tipo de ajuste geométrico que se ha estudiado antes para las bóvedas cuatripartitas (figura 10.17). En el caso de las bóvedas de abanico de la capilla del King's College, la separación completa de la fábrica se ha producido *sólo* en los muros, y no se aprecian las grietas de «Sabouret» a la distancia habitual de en torno a 1 m de los muros.

La bóveda de la Capilla de Enrique VII

Las cuatro bóvedas de abanico más grandes fueron proyectadas y construidas en algo más del primer decenio del siglo XVI. La bóveda de Westminster, con una luz de 10,6 m, se construyó durante el periodo de 1502–09, y los proyectistas fueron, probablemente, Robert (muerto en 1506) y William Vertue, ambos Maestros Canteros del Rey. El espesor de la bóveda es de unos 100 mm, e incluso menor en ciertas partes. Los Vertue habían proyectado la bóveda de la Abadía de Bath (ca. 1503, con una luz de 9,1 m y un espesor de unos 90 mm). William Vertue visitó al menos tres veces el King's College de Cambrigde,

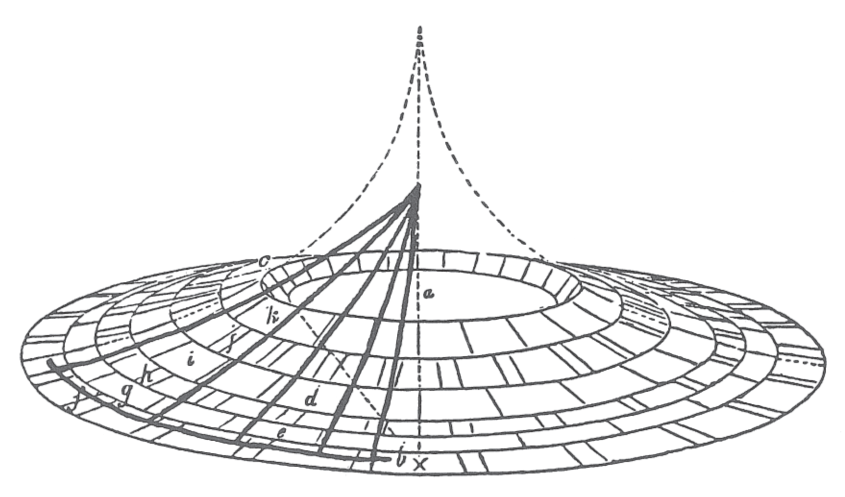


Figura 10.20
Conoide cóncavo invertido (según Mackenzie 1840; se han añadido las líneas de trazo más grueso)

durante la última fase de la construcción de 1508–15, en los años 1507, 1509 y 1512; la bóveda, cuyo maestro fue John Wastell, se construyó entre 1512–13. Esta bóveda, la mayor de las cuatro, cubre 12,7 metros y tiene un espesor de unos 120 mm.

Finalmente, la bóveda más pequeña de las cuatro, con 8 metros de luz y unos 90 mm de espesor, es la del trascoro en la cabecera de la catedral de Peterborough, que también puede atribuirse a Wastell (por su estilo). Hay dudas en cuanto a su fecha, que podría ser hacia 1509, siendo así precursora de la capilla del King's College, o hacia 1518, en cuyo caso se derivaría de ella. La figura 10.21, de Willis (1842), muestra la estructura de Peterborough. Las cuatro bóvedas presentan una relación entre luz y el espesor de alrededor de 100; la cáscara del huevo de una gallina tiene esa misma proporción.

Las bóvedas de Peterborough, Bath y de la capilla del King's College se construyeron mediante una fábrica de nervios y plementos en las partes más bajas de los abanicos, y con sillares las partes superiores y los tímpanos. En la figura 10.21 se puede apreciar que la primera hilada por encima del relleno de los conoides de la bóveda es una obra de nervios y plementos. El dibujo de Willis de la bóveda de la capilla de St. George, en Windsor (figura 10.22), muestra este sistema combinado de nervios y plementos, y de construcción de sillería. Sin embargo, la bóveda de Windsor (fechada hacia 1506, y con William Vertue implicado de nuevo en trabajos de construcción en la cabecera), no es una verdadera bóveda de abanico; se trata en realidad de una bóveda de ligaduras, donde estos nervios secundarios sin función estructural esencial se superponen a una simple bóveda de ca-

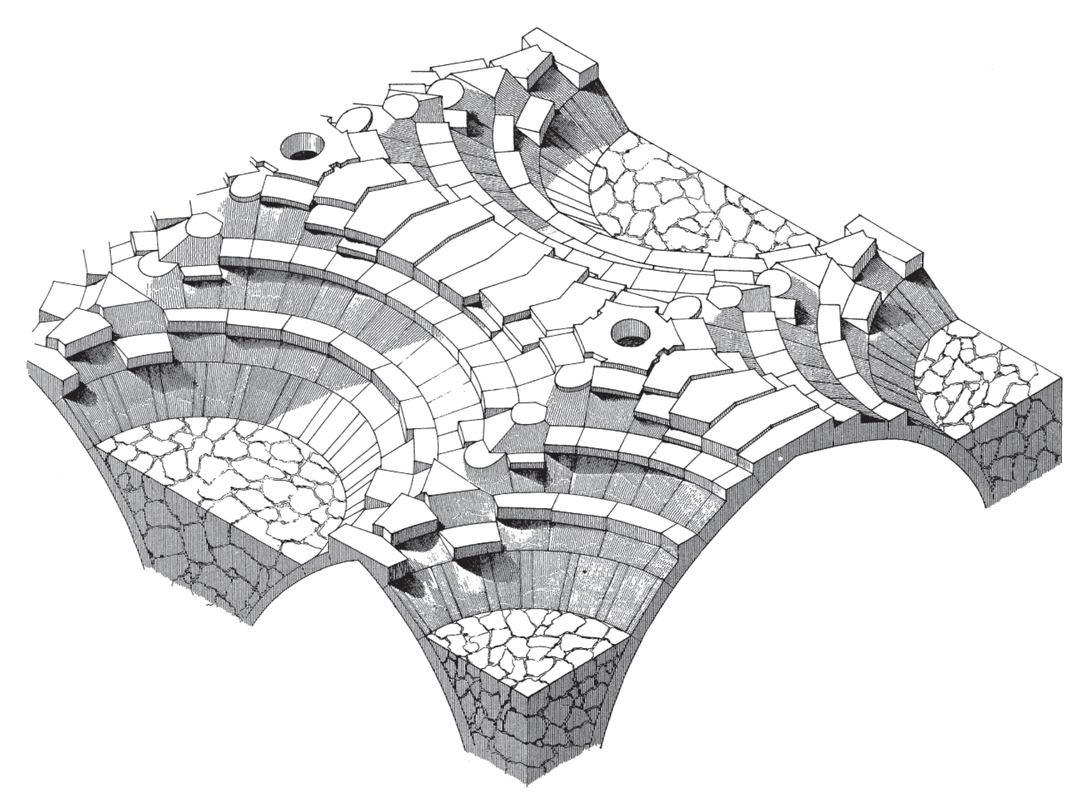


Figura 10.21
Vista isométrica de la bóveda de abanico en Peterborough (Willis 1842). El relleno de mampostería de los conoides es fundamental para la estabilidad de la bóveda. La primera hilada de fábrica por encima del relleno es una obra de nervios y plementos, mientras que el resto del abanico se ha construido con sillares de fábrica

ñón en la dirección este-oeste, que se interseca con bóvedas en dirección norte-sur sobre las ventanas de cada tramo. Los agrietamientos en Windsor siguen con exactitud el patrón de grietas de la bóveda cuatripartita; en particular, la grieta de articulación cerca de la clave, figura 10.17(b), es muy visible.

La bóveda de la capilla de Enrique VII difiere en dos aspectos importantes con las otras tres bóvedas de abanico auténticas. En primer lugar, está construida en su totalidad con fábrica de cantería; nervios y plementos se labran sobre una misma piedra, de modo que los nervios en realidad son una decoración superficial, que define visualmente la forma de la bóveda. En segundo lugar, los abanicos no arrancan de los muros de la capilla, sino de unos pinjantes situados a unos 2 m de los muros; en la figura 10.23 se ha reproducido el dibujo de Willis. Evidentemente, los pinjantes no pueden soportar los abanicos; la misma intención de asombrar y deleitar tiene un antecedente en la bóveda de la Divinity School en Oxford, construida en 1480 por William Orchard. De hecho, se puede ver una «broma» de este tipo en el álbum de Villard de hacia 1235 (figura 10.24); cuando se termine la arcada que está en construcción, se puede retirar el tronco de árbol para dejar una dovela pinjante (*Par chu tail om vosure pendant — Par ce moyen on taille une voussure pendante*).

Los pinjantes de la capilla de Enrique VII son en realidad simples sillares alargados que forman parte de los arcos estructurales, como se puede apreciar en la figura 10.23. En la Divinity School, William Orchard dejó los arcos a la vista, mientras que en Westminster, los Vertue hicieron que el arco «desapareciese» a través de la bóveda, por lo que 100 mm de los 300 mm

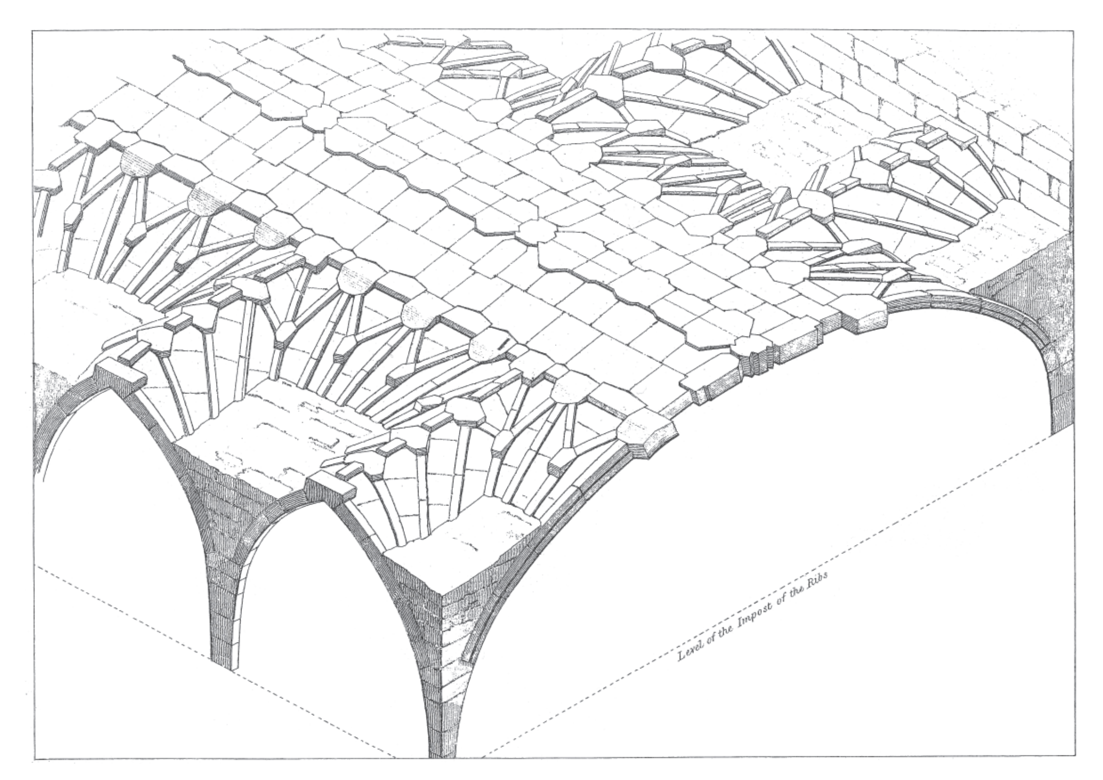


Figura 10.22
Vista isométrica de la bóveda de la capilla de St. George, en Windsor (Willis 1842). La fábrica de nervios y plementos inferior define las superficies de intersección entre las bóvedas de cañón, mientras que la fábrica de sillería superior forma el cañón principal de la iglesia

de su espesor total quedan «embebidos» en la bóveda, dejando 200 mm a la vista por la cara superior. La figura 10.25 (de Colvin 1975, a partir de Willis 1842) muestra la sección transversal de la bóveda; la crestería decorativa se ha excluido del espesor citado más arriba. En la fotografía de la figura 10.26 se aprecian los 200 mm del arco que sobresalen sobre el trasdós de la bóveda; la nave de la capilla tiene cuatro tramos y la fotografía es del arco central, ligeramente hacia el norte del espinazo de la bóveda. Puede verse que, en primer plano, uno de los sillares de la bóveda se ha deslizado hacia abajo (unos 50 mm) y en el siglo XIX (por Cottingham, o quizá G. G. Scott) se dispuso una barra de hierro para impedir movimientos futuros. Estos y otros daños se discuten de manera más completa en los párrafos siguientes.

Se puede ver también que se ha abierto una grieta de articulación entre las dovelas del arco (figura 10.26); la máxima apertura de esta grieta es de 10 mm, en el espesor de 200 mm que queda visible. Este agrietamiento de articulación se corresponde con el mostrado de manera esquemática en la figura 10.17(b). Como sucede con todas las bóvedas, un cedimiento del sistema de contrarresto ha permitido que la bóveda se abra y, de hecho, la luz de la nave se ha incrementado en unos 200 mm o más. El patrón de rótulas en el arco central de Westminster se ha dibujado en la figura 10.27 a partir de observaciones in situ; en el dibujo se han ampliado las deformaciones por un factor en torno a tres. La fotografía (de la figura 10.28) fue tomada en enero de 1995, en ella se muestra el pinjante norte del arco central (mirando hacia el oeste), y es patente su inclinación con respecto al poste vertical del andamio. Se aprecian inclinaciones similares en el resto de los pinjantes de la bóveda. (Los tirantes de hierro, hay

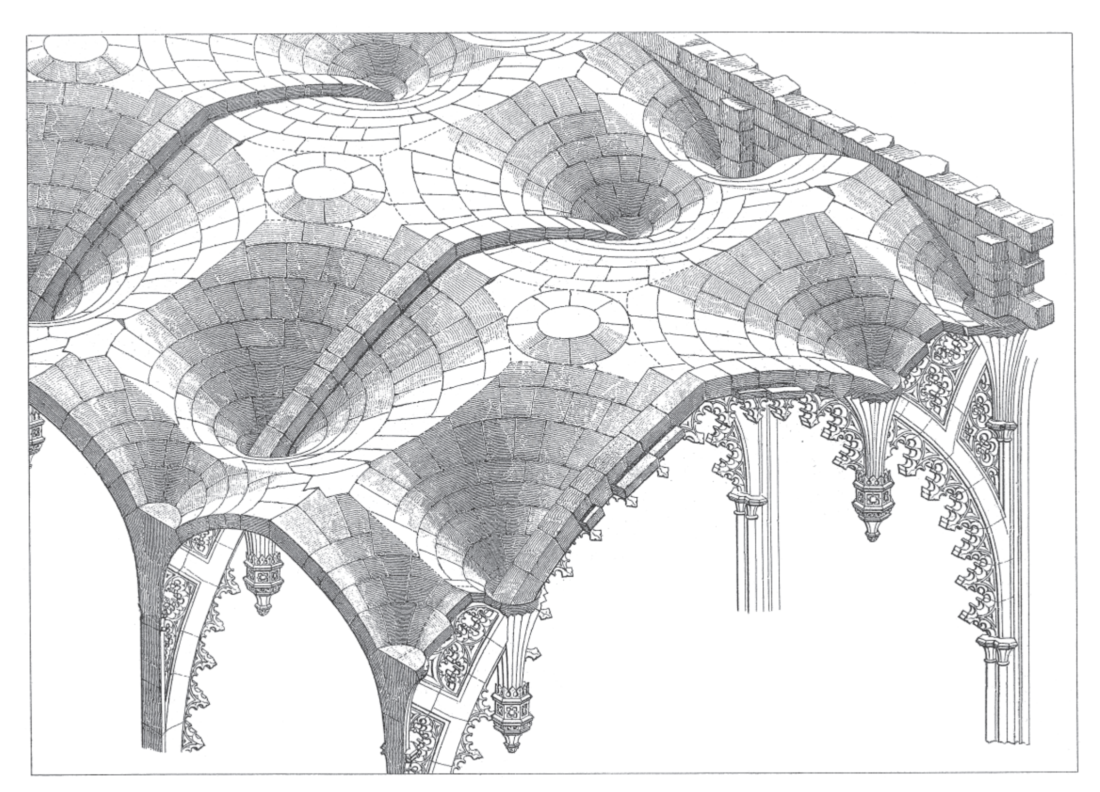


Figura 10.23
Vista isométrica de la capilla de Enrique VII en Westminster (Willis 1842). La bóveda está construida por completo con sillares de fábrica, en lugar de hacerlo con nervios y plementos

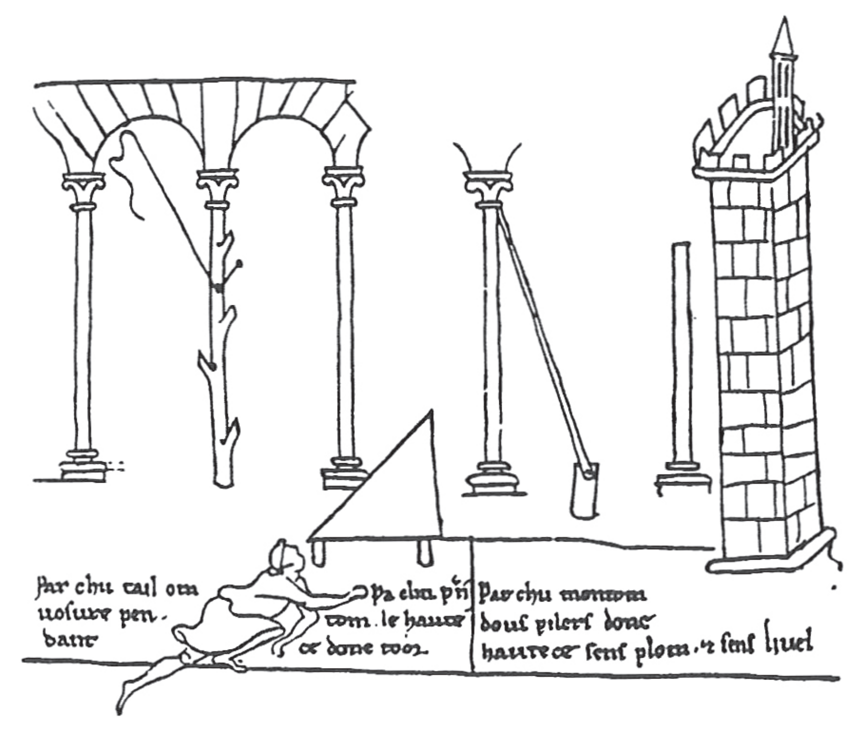


Figura 10.24
Fragmento de una página del álbum de Villard de Honnecourt (folio 20 verso). Cuando se haya terminado la construcción de la arcada, el tronco de árbol se podrá quitar para dejar una dovela pinjante

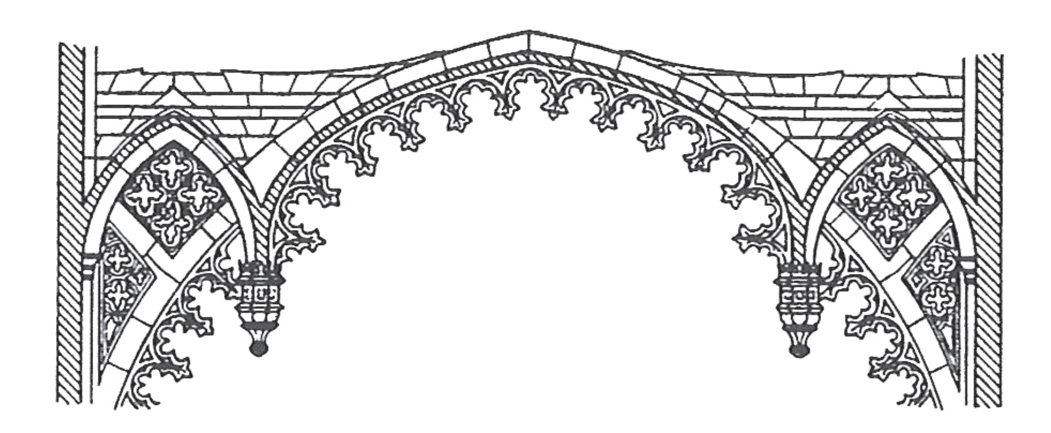


Figura 10.25
Sección transversal de la capilla de Enrique VII (dibujo de Colvin 1975, a partir de Willis 1842). Los pinjantes están a unos 2 m de los muros de la capilla

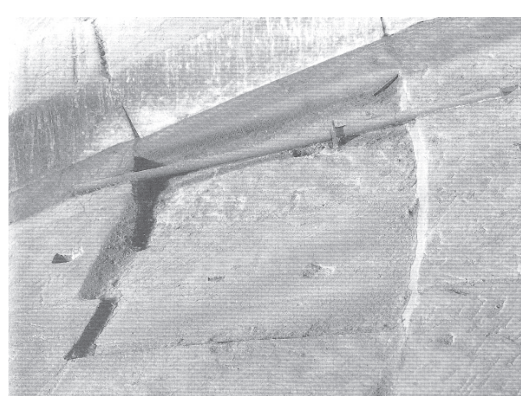


Figura 10.26
Grieta de articulación en el arco central de la bóveda de la nave, ligeramente al norte de la mitad de la luz (fotografía del autor, tomada en enero de 1995). La barra de hierro unida al sillar descolgado fue colocada en el siglo XIX

cuatro en la nave, se pusieron con la clara intención de impedir una apertura mayor. En su estado actual, la bóveda no muestra indicios de movimientos importantes durante el último siglo, en particular desde 1933 cuando Tapper llevó a cabo trabajos en la bóveda. Por tanto, parece que los tirantes han sido eficaces —o quizá nunca fueron necesarios, ya que no ha habido ningún movimiento desde su colocación. En cualquier caso, no hay ninguna razón para eliminarlos).

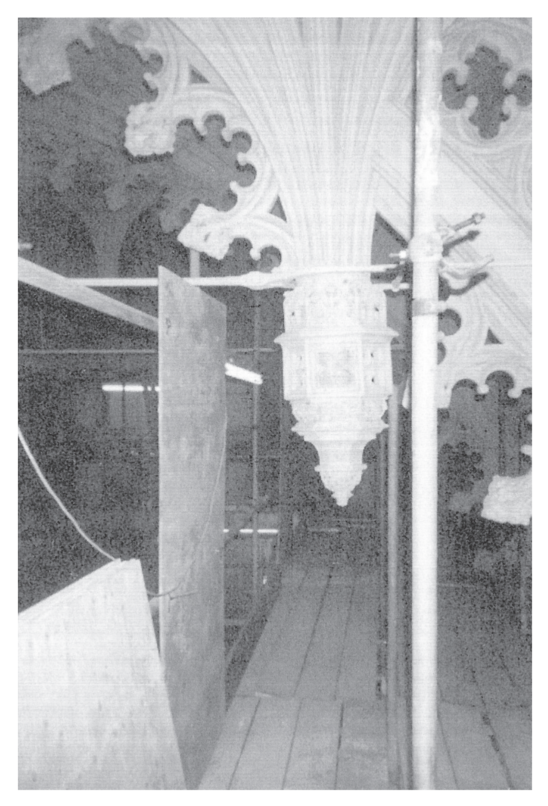


Figura 10.28
Pinjante norte del arco central, mirando hacia el oeste (fotografía del autor, tomada en enero de 1995)

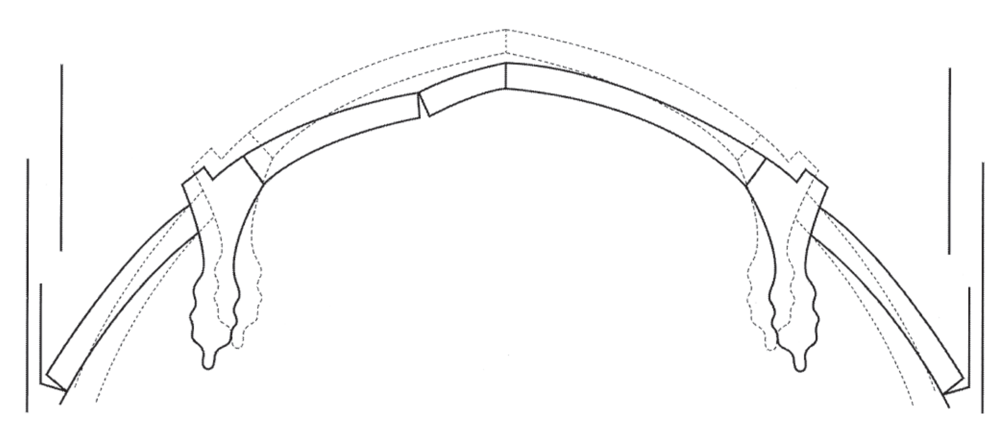


Figura 10.27
Deformación debida a las articulaciones del arco central, con los movimientos ampliados por un factor de aproximadamente tres. El lado norte queda a la izquierda, y el sur a la derecha

El esquema de la figura 10.27 muestra *solamente* el arco; no se ha dibujado el casco de la bóveda ni la tracería de los cuadrifolios incluidos en los recuadros romboidales (figura 10.25). Los movimientos de la figura 10.27 no pueden ocurrir sin una marcada distorsión de este recuadro, y la fotografía de la figura 10.29 muestra esta distorsión (el mismo arco central, lado norte, mirando hacia el este). El cuadrifolio superior ha sufrido una fuerte distorsión por el descenso de uno de los sillares de la bóveda, y más adelante se discutirá este aspecto. El resto de cuadrifolios indican con claridad una elongación del rombo en dirección norte-sur. La tracería inferior muestra un patrón similar de movimientos.

El sillar de la bóveda que ha descendido (figura 10.29) es el equivalente en la bóveda de abanico de Enrique VII a la grieta de Sabouret de la figura 10.17. No hay suficiente material en la dirección norte-sur (transversal) de la nave para adaptarse al incremento de luz de la bóveda; el arco principal ha desarrollado unas articulaciones (figura 10.27) y el material de la bóveda tiende a abrirse. En la bóveda cuatripartita (figura 10.17), el cañón norte-sur tiene una sección prácticamente constante, y se produce una separación completa a lo largo de las grietas de Sabouret. Las superficies que se muestran en el dibujo de la figura 10.23 son mucho más complejas, formadas por porciones de abanico; la separación de la fábrica no se traduce en grietas, sino en el descenso de (algunas) piedras de la bóveda.

Los pinjantes de la figura 10.25 están situados a unos 2 m de los muros; las secciones críticas están en las cabezas de los arcos interiores, aproximadamente a 1 m de los muros. Las juntas entre las piedras de los abanicos son perpendiculares a la superficie de la bóveda y forman respecto a las cabezas de los arcos interiores ángulos de unos 45º con la vertical, como se puede ver en la sección transversal (figura 10.25). Así, el intento de abrir una grieta de «Sabouret» de 10 mm produce el deslizamiento de algún sillar de la



Figura 10.29
Cuadrifolio norte del arco central, visto mirando hacia el este (fotografía del autor, tomada en enero de 1995). La piedra más alta del cuadrifolio ha descendido unos 50 mm

bóveda en esta zona; el movimiento es de unos 50 mm, y este es el orden de deformación visible en el sillar que ha descendido en el cuadrifolio (figura 10.29)

Se inspeccionaron los cuatro tramos de la bóveda por el trasdós y el intradós, y se hizo un registro de todos los sillares que parecían haber descendido de esta manera. Se hizo una estimación sobre la magnitud de los desplazamientos, aunque estas medidas se refirieron, por supuesto, desde los sillares contiguos, y como las superficies de contracto entre los sillares presentan algunas irregularidades, la lectura de estos registros no se puede considerar exacta. Sin embargo, si los sillares que han descendido se agrupan en tres clases, a saber, aquéllos que han descendido menos de 20 mm, entre 20 y 40 mm y por encima de 40 mm, surge un patrón claro. La figura 10.30 es una planta vista desde arriba de los cuatro tramos abovedados de la nave, y puede verse que se han producido los movimientos de «Sabouret» en cada uno de los tres arcos principales. En el extremo occidental, la fábrica masiva ha impedido cualquier movimiento, y, en el extremo Este, un gran arco doble separa la nave de la cabecera del ábside, y, de nuevo, sólo aparecen evidencias de pequeños movimientos. En algunas zonas, el mortero no parece ser el original, y algunas piedras de la bóveda parecen haber sido recolocadas (quizá por Tapper en 1933).

Estos movimientos se han registrado en la figura 10.30. Cuatro sillares de la bóveda que han descendido están próximos a la clave del arco central; el que presenta un movimiento mayor es el que aparece en la fotografía de la figura 10.26. A la apertura de la grieta de 10 mm en el espesor visible de 200 mm, corresponde una apertura de 15 mm en el intradós de la bóveda 100 mm más abajo y un estudio de la inclinación de las juntas (figura 10.25) muestra que esta apertura de 15 mm concuerda con el descenso de 50 mm del sillar adyacente.

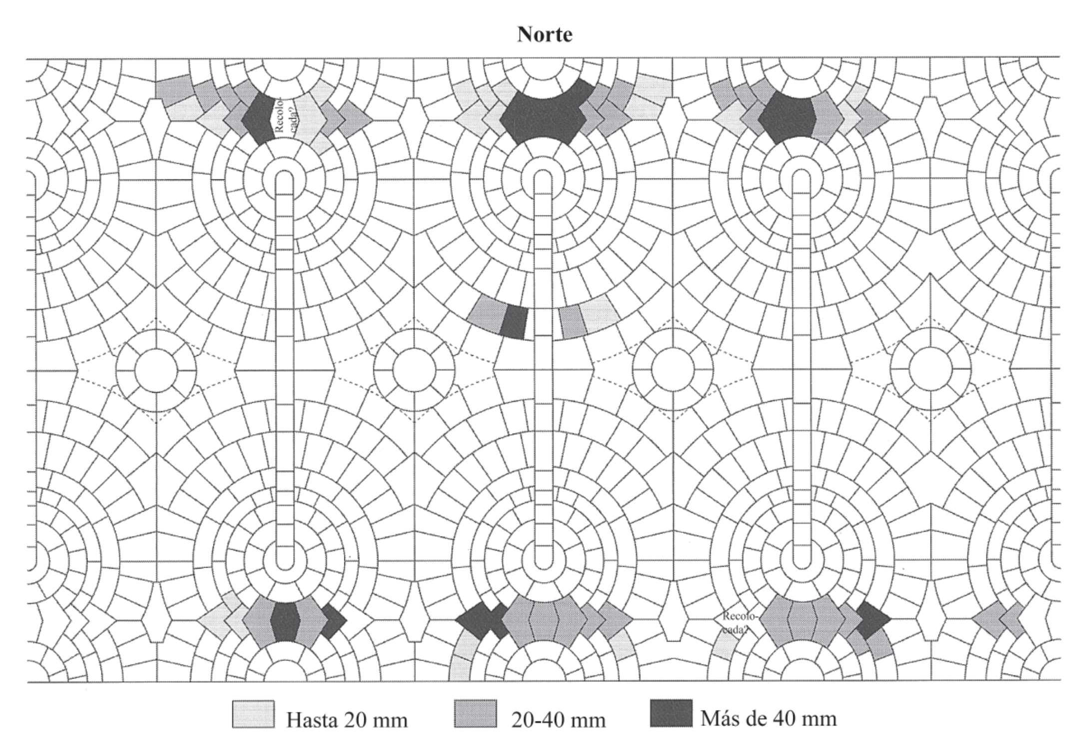


Figura 10.30
Planta del trasdós de los cuatro tramos indicando el descenso de las piedras

Los defectos que se ven en las fotografías y dibujos que acompañan este texto, y en la planta de la figura 10.30, se explican todos ellos por completo en términos de un incremento de la luz de la bóveda. Tal incremento de la luz resulta de los empujes que genera la propia bóveda de fábrica y, también, de la techumbre superior de madera que la protege. El incremento de la luz es visible en cualquier iglesia, grande o pequeña, y se debe en última instancia a movimientos de los cimientos del sistema de contrarresto. La escala de tiempo para la consolidación del suelo bajo las cimentaciones se mide en decenios, y la mayor distorsión de la fábrica se produce normalmente en este espacio de tiempo. Por tanto, la mayor deformación visible de la geometría de una construcción antigua ha permanecido casi sin cambios durante siglos.

Sin embargo, hay una fuente continua de distorsiones menores, que provocan lo que se ha denominado la «deriva» de las fábricas. El mecanismo de esta deriva procede de la naturaleza de la fábrica como un material unilateral, incapaz de soportar esfuerzos a tracción. Una grieta, una vez abierta, no puede cerrarse, sino que se quedará «acuñada» por la acción del polvo. Es este proceso lento de formación de fisuras, del espesor de un cabello, que pueden afear el conjunto, pero que son inofensivas, lo que puede llevar a trabajos de reparación cada, digamos, cien años.

Los defectos de la bóveda de la capilla de Enrique VII parecen antiguos y, seguramente, se habían desarrollado por completo, digamos, hacia 1550. Desde entonces, una rutina de mantenimiento se habrá ido ocupando de los agrietamientos menores de forma continua. Hace unos 70 años se colocó un andamio en la bóveda, y en la campaña de 1994–95 no se encontró ninguna evidencia de nuevos defectos.

11
Rosetones

En un muro de fábrica se puede realizar un hueco con relativa impunidad. Si se trata de un hueco rectangular, será necesario colocar un dintel monolítico para soportar el peso del muro situado sobre el hueco; una solución más elaborada consistirá en sustituir el dintel monolítico por un arco adintelado formado por varias dovelas. Cuando el ancho del hueco se hace mayor, el arco adintelado se convierte, en el gótico, en un arco apuntado y su aspecto nos da una idea del «flujo» de fuerzas en torno a la ventana.

Si se trata de un hueco circular, durante un siglo y medio al hueco se le ha llamado óculo. También en este caso el hueco circular necesita un refuerzo a lo largo de su perímetro; el óculo está rodeado por un arco circular en la parte superior y un arco simétrico en la parte inferior. Óculos sin vidrios permitían el paso de la luz y el aire a las dependencias tanto en las iglesias como en las viviendas; no se empleaban en pequeñas dependencias como las habitaciones en las que no era necesaria la entrada de luz, y en esos casos la ventilación se realizaba a través de las puertas abiertas. En las iglesias románicas posteriores al siglo XII, pueden encontrarse óculos en los muros piñones, aunque, los grandes rosetones se desarrollaron en el primer gótico. Un óculo de, por ejemplo 2 m de diámetro, permite el paso de algo de luz, aunque no mucha, pero también la entrada de agua de lluvia.

En los edificios del último románico los óculos que aparecen son cada vez mayores con lo que se hace necesario el empleo de cristales y, con ello, el empleo de un entramado que los soporte. El entramado más sencillo es el formado por un elemento vertical (mainel), o por un mainel y un elemento horizontal (travesaño) colocado siguiendo el diámetro formando una cruz. Rápidamente se añadieron más barras radiales para formar un rosetón, con 6, 8, 12, 16 o incluso más radios que nacen de un «cubo» central (que a su vez podía ser un anillo de piedra con el hueco acristalado) hasta llegar a la circunferencia exterior (Cowen, 1979).

La carga estática vertical es despreciable, tanto si el radio está horizontal, vertical o inclinado. La carga más crítica sobre los elementos de un ventana de fábrica es la producida por las fuerzas transversales producidas por el viento, y esta carga es varias veces superior al peso propio del material. Por tanto, en un primer análisis se pueden despreciar las fuerzas debidas al peso propio y estudiar únicamente las provocadas por la presión horizontal del viento.

El arco adintelado

Una ventana grande de una catedral puede tener, de modo aproximado, las dimensiones de un rectángulo de, digamos, 12 × 9 m. Tendrá quizá dos maineles principales, junto con otros maineles secundarios y

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Rose Windows». En: *Essays in the History of Mechanics*, editado por A. Becchi et al. (Basel: Birkhäuser, 2003): 165–177. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

travesaños horizontales, pero, en esencia, los dos maineles principales soportarán las fuerzas del viento procedentes de la superficie acristalada encerrada entre ellos, y las transmitirán a sus extremos en lo alto y la base de la ventana, figura 11.1. Se puede suponer que los maineles trabajan como vigas verticales sometidas a la acción de una carga uniformemente distribuida, de la misma manera que los dinteles de la arquitectura griega arquitrabada pueden considerarse como vigas horizontales sometidas a su propio peso.

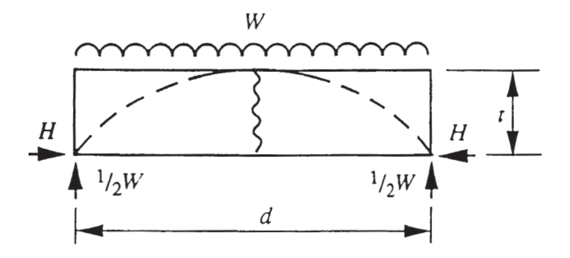


Figura 11.2
Dintel griego

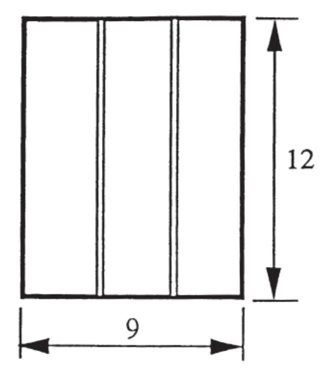


Figura 11.1
Ventana rectangular

En la figura 11.2 se ha representado un dintel simple, y la carga *W* (peso propio), produce unas reacciones verticales en los extremos de ½*W*. Si el dintel actúa realmente como una viga a flexión, entonces, aparecerán unas tensiones de tracción en la cara inferior y las correspondientes tensiones de compresión en la cara superior. Este comportamiento es, de hecho, inadmisible para la fábrica (Heyman, 1995); las piedras, individualmente, puede ser resistentes a tracción, pero si se agrietan, sólo podrán transmitir fuerzas de compresión por las partes que permanecen en contacto. Muchos dinteles griegos están rotos cerca del centro como se indica en la figura 11.2, por lo que no hay posibilidad de considerar esta estructura agrietada como una viga sometida a flexión; se trata de un arco plano formado por dos dovelas (Heyman, 1972). Como tal, permanecerá estable si se impide que se separen los apoyos; el empuje horizontal *H* en la figura 11.2 se supone que se equilibra (en un templo griego) por los dinteles adyacentes. Un pequeño aumento de la luz provocará un ligero descenso y la grieta central se convertirá en una «rótula»; la trayectoria de las fuerzas en el interior de la fábrica, la línea de empujes, está representada en la figura 11.2 por una línea de trazos.

Así, un dintel sin agrietar que soporta una carga uniforme *W* estará soportado en sus extremos por dos fuerzas verticales ½*W*. Una vez agrietado, sólo permanecerá en equilibrio si pueden desarrollarse fuerzas horizontales *H* en los apoyos; por simple equilibrio estático,

$$H = \frac{Wd}{8t} \qquad (1)$$

Cada uno de los maineles de la figura 11.1 estará construido con varias piezas de piedra unidas mediante espigas metálicas (de hierro, de bronce o de acero inoxidable). Las espigas apenas contribuirán a la resistencia a flexión, y en el caso de que exista mortero entre las piezas, sólo podrá resistir tensiones muy pequeñas. Cada mainel se comportará como una arco plano vertical formado por varias dovelas; a su vez, las dovelas están conectadas entre sí y al muro de fábrica en la parte superior e inferior mediante espigas de modo que se impide su deslizamiento; el mainel está sometido a presiones horizontales debidas al viento y se comporta de la misma manera que el dintel griego de la figura 11.2. Suponiendo una presión transversal de viento de 1 kN/m^2 (un valor ligeramente bajo), cada mainel de la figura 11.1 estará sometido a una carga uniforme de 36 kN (3,6 toneladas). Suponiendo que la relación d/t es de 24, entonces, de la ecuación (1) se obtiene $H=3W$; una carga transversal de 36 kN provocará empujes de 108 kN

en los extremos. Cada mainel está en equilibrio por fuerzas horizontales de 18 kN (las reacciones de extremo ½*W* de la figura 11.2), y las espigas de los extremos sirven para transmitir estas reacciones a la fábrica principal; además, el viento provoca reacciones verticales en los extremos (*H* en la figura 11.2) de 108 kN (si el mainel tiene una esbeltez *d/t=24*), como se indica en al figura 11.3. Cada mainel contendrá en su espesor una línea de empujes curva (la línea de trazos de la figura 11.2); esta línea de empujes es prácticamente bidimensional, y estará contenida en un plano paralelo a la dirección del viento.

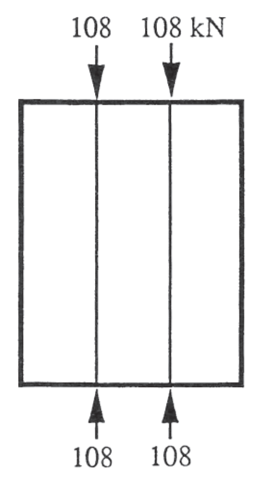


Figura 11.3
Cargas en los extremos de los maineles

En consecuencia, un requisito indispensable para cualquier elemento de una ventana de fábrica es que sea casi recto: sólo se permiten elementos ligeramente curvados. Se trata de un requisito habitual, por ejemplo, en la catedral de Wells los elementos cruzados en tijera que unen los pilares torales no son rectos, pero se comportan como si lo fuesen porque en su interior pueden estar contenidos «puntales» rectos.

Análisis de equilibrio

En el ejemplo numérico anterior se ha hecho, sin advertirlo, una hipótesis que habitualmente hacen quienes analizan estructuras. El viento actúa sobre los vidrios de la ventana y el entramado que soporta los cristales reparte la presión sobre los maineles y estos, a su vez, al marco de la ventana. Se ha supuesto que la carga sobre los maineles se reparte de manera uniforme. Se acepta esta simplificación sin disponer de información específica sobre la disposición del entramado interior de la ventana; de hecho, el problema es altamente hiperestático y lo mejor que puede hacer el analista en estos casos consiste es hacer una suposición «razonable» en cuanto a los parámetros a considerar en los cálculos. El realizar estas suposiciones no invalida el proceso; de hecho los ingenieros estructurales han trabajado siempre de esta forma, y han confiado, en la mayoría de los casos sin saberlo, en los teoremas plásticos.

El teorema del límite inferior o teorema «de la seguridad» es sencillo: si el analista puede encontrar un estado en que la estructura se encuentre «confortable», entonces, no puede haber un estado en que la estructura llegue al colapso. La potencia de este teorema radica en que el análisis no tiene que obtener el estado «real» de la estructura sometida a las cargas dadas; si se puede encontrar algún estado de equilibrio, entonces, esto es condición suficiente para demostrar que la propia estructura estará en un estado seguro (ciertamente diferente al obtenido).

Así, para el caso de la ventana rectangular de la figura 11.3 sobre la que actúa una carga transversal de viento de 1 kN/m^2, cada uno de los maineles *puede* estar sometido a la acción de una carga *uniformemente distribuida* de 36 kN, y esta carga producirá en los extremos los empujes calculados de 108 kN. Las fuerzas que se indican en la figura representan un estado de equilibrio posible; si los maineles pueden soportar los empujes extremos (y esa es una cuestión de análisis de tensiones más que de análisis estructural), entonces los cálculos nos permiten asegurar que la ventana es capaz de soportar la carga de viento dada. (Colocando en la ventana de la figura 11.3 un mainel de las dimensiones adecuadas, la tensión media de compresión en los extremos producida por los empujes extremos es del orden de 1 N/mm^2, que es un valor aceptable).

Se puede avanzar en el problema si se añade a la ventana un travesaño a dos tercios de la altura, como se indica en la figura 11.4. Los tres recuadros superiores soportan cada uno una fuerza de viento de 12 kN y los recuadros inferiores de 24 kN. Nuevamente, hace falta asumir una hipótesis acerca de la manera

en que los maineles y travesaños soportan estas cargas. Una solución posible de equilibrio estático consiste en suponer que todas las fuerzas se transmiten al travesaño (y al marco superior e inferior de la ventana), de manera que cada una de las tres partes del travesaño soporta una carga uniforme (!) de 18 kN, figura 11.5.

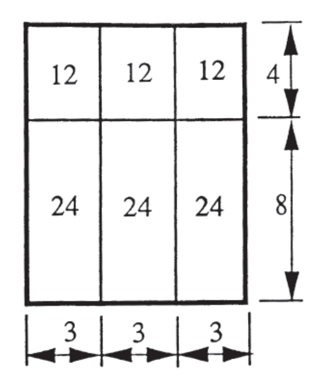


Figura 11.4
Maineles y travesaño

El travesaño se puede considerar como un elemento que salva una luz de 9 m entre sus extremos, sin recibir apoyo de los maineles; dado que el travesaño estará formado por piezas cortas de piedra, unidas entre sí por espigas, esta hipótesis es poco razonable. Resulta mucho más razonable suponer que el travesaño está formado por tres arcos adintelados del tipo representado en la figura 11.2, en cuyo caso se puede establecer el equilibrio de fuerzas de la figura 11.5.

Resulta evidente a partir de esta figura que cada mainel está sometido a una carga puntual transversal de 18 kN (y a ninguna otra carga debida al viento), como se ha dibujado en la figura 11.6. Las líneas de

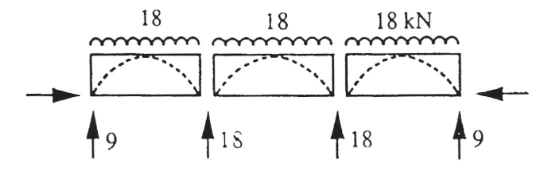


Figura 11.5
Equilibrio del travesaño

empujes en el mainel (agrietado) son rectas y, para una relación *d/t*=24 el valor de *H* es de 96 kN (compárese este valor con los 108 kN obtenidos sin travesaño). En realidad, los maineles y el travesaño funcionarán compartiendo la carga de una manera desconocida, pero hay que recalcar que los cálculos «razonables» representados en las figuras 11.5 y 11.6 son seguros. Estudiando subdivisiones más complejas (añadiendo maineles más pequeños y más travesaños) se llega a la misma conclusión de que los maineles deben soportar en sus extremos una fuerza en torno a los 100 kN.

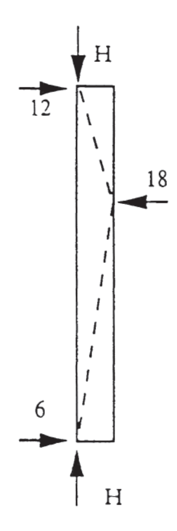


Figura 11.6
Equilibrio de un mainel

Para mostrar otro ejemplo de la interacción entre los elementos de una ventana estudiaremos el caso «artificial» de la tracería de la figura 11.7. Se supone que la ventana circular (un rosetón simple) mostrada tiene únicamente 3 parteluces o radios de 2 m de longitud, sobre los que apoya el acristalamiento. Como antes, se tomará una carga de viento de 1 kN/m²; por tanto, la ventana en su conjunto está sometida a una fuerza de 4π ó 12,6 kN. El perímetro de la ventana soportará directamente parte de esta carga y los radios el resto; una hipótesis desfavorable consistirá en suponer que la organización de la cristalera es tal que toda la presión del viento se aplica únicamente en los radios, con

lo que cada uno de ellos deberá soportar 4,2 kN. Esta carga no se distribuirá de manera uniforme, pero si no tenemos más datos acerca de la organización de la armadura de los vidrios, se puede suponer que el equilibrio de uno de los radios se produce del modo en que se representa en la figura 11.8 Si la relación *d/t* es 10 (para un radio de piedra de 2 m de longitud y 200 mm de espesor) el valor de *H* es de 21 kN.

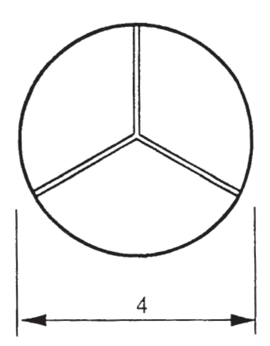


Figura 11.7
Ventana circular con parteluces radiales

Cada uno de los tres radios empuja en el centro con una fuerza *H* (= 21 kN); las tres fuerzas están en el mismo plano y forman entre ellas un ángulo de 120º con lo que se equilibran mutuamente. En la figura 11.9 se representa el estado de equilibrio de la ventana bajo la acción de una carga de 12,6 kN; se trata de un ejemplo sencillo, artificial pero arquetípico, del tipo de análisis necesario para comprobar la estabilidad de un rosetón. Los «radios» de una ventana de este tipo empujan contra la fábrica del contorno

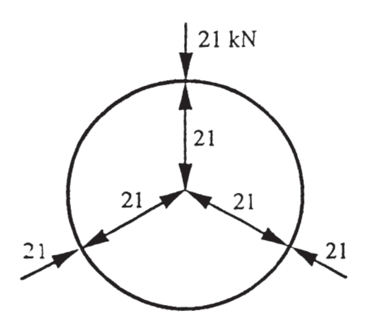


Figura 11.9
Fuerzas en los parteluces

y es preciso calcular el valor de ese empuje (en este caso, *H* = 21 kN). Más aún, deben existir planos de empuje contenidos en los elementos que forman la ventana, incluso si esas barras presentan una curvatura moderada. Por supuesto, empujes internos pueden cambiar de dirección en las uniones entre elementos. Las trayectorias de fuerzas se verán como rectas en un alzado como el de la figura 11.9; dentro de cada uno de los elementos, los empujes deberán seguir un trazado del tipo mostrado en la figura 11.8 con una línea de trazos.

Equilibrio de un rosetón

En la figura 11.10 se muestra un rosetón simple que supondremos sometido a una carga transversal de viento. Es obvio que una vez calculadas las reacciones en los extremos de los radios se podrá encontrar una solución de equilibrio satisfactoria para todo el rosetón. Las reacciones de extremo se transmitirán

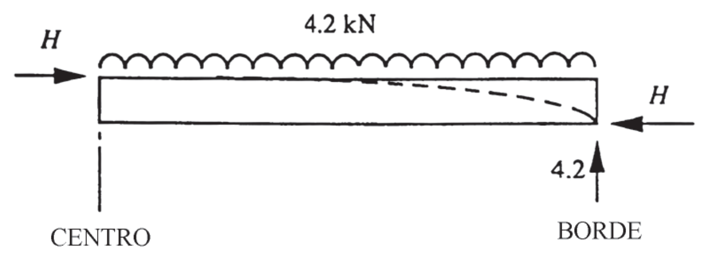


Figura 11.8
Equilibrio de un parteluz

directamente por los radios; en su extremo interior, los radios terminan en un anillo central de fábrica, tal como se muestra en la figura 11.10. Las fuerzas aplicadas por los radios hacen que el anillo se encuentre sometido a una compresión anular (casi) uniforme; de hecho, se puede imaginar que un polígono regular de doce lados, un dodecágono, está contenido dentro del anillo circular, representando las trayectorias de las compresiones internas. Por tanto, la geometría de una tracería como la mostrada en la figura 11.10 es correcta.

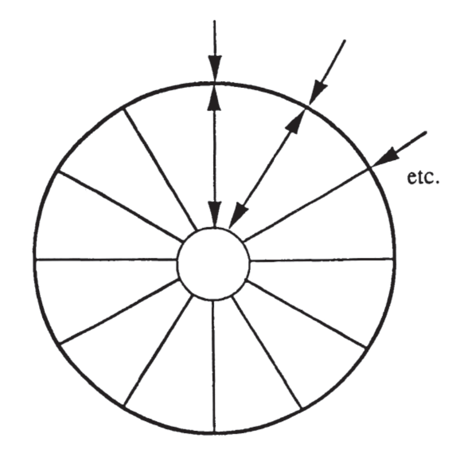


Figura 11.10
Rosetón simple

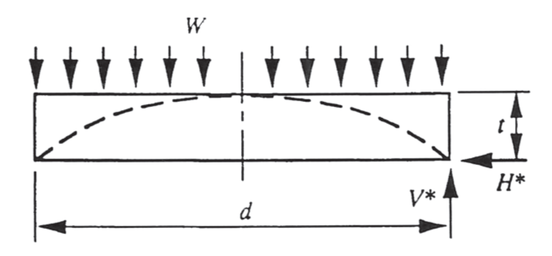


Figura 11.11
Rosetón de infinitos parteluces radiales

Con el fin de comprobar las tensiones hace falta obtener el valor de las reacciones en los extremos de los radios y para ello se puede deducir una sencilla formula aproximada. En la figura 11.11 se ha imaginado que los parteluces del rosetón de la figura 11.10 se han «extendido» hasta formar una losa circular, que resiste la carga exterior de viento W mediante la disposición cupuliforme de empujes indicada por una línea de trazos en la figura 11.11. Por supuesto, la suma de las de las reacciones horizontales en el contorno del rosetón de diámetro d debe de ser igual a W; se supone que la reacción total V^* se distribuye uniformemente sobre el perímetro del rosetón. Análogamente, el empuje total H^* del rosetón contra su marco circular también se reparte uniformemente a lo largo de la circunferencia. Para valores pequeños de la relación t/d es fácil demostrar que

$$H^* = \frac{Wd}{4t} \qquad (2)$$

Así, para la ventana de tres radios de la figura 11.7, en la que $d = 4$ m y $t = 200$ mm, el valor de H^* es $5W$, y para $W = 12{,}6$ kN (como en el ejemplo numérico), $H^* = 63$ kN. Esta es la reacción *total* producida por los tres radios, de manera que cada radio empuja con 21 kN, tal y como se muestra en la figura 11.9.

Un ejemplo numérico

El rosetón de la figura 11.12 tiene un diámetro de 6 m y consta de 12 «pétalos». Se supone que la fábrica tiene un espesor constante de 300 mm. La carga de viento es de 2 kN/m²; por tanto, la carga total sobre la ventana será $W = 56{,}5$ kN. La relación $d/4t$ vale 5, con lo que H^*, ecuación (2), vale en total 283 kN. Como la ventana tiene 12 compartimentos, la reacción en el extremo de cada pétalo es de 23,6 kN, como se muestra en la figura 11.12. Los extremos de los pétalos se pueden asimilar, esquemáticamente, a un triángulo equilátero contenido en el espesor del trazado curvo de la fábrica y el análisis se pueden extender a los elementos interiores del rosetón, obteniendo las fuerzas de compresión que se indican en la figura 11.12. Por último, las condiciones de equilibrio del dodecágono interior se representan en la figura 11.13. La fuerza transmitida por el anillo tiene el valor ½(19,2)cosec15º, esto es 37,1 kN, que, para una sección de fábrica de 150 mm × 300 mm supone una tensión de compresión media de 1 N/mm².

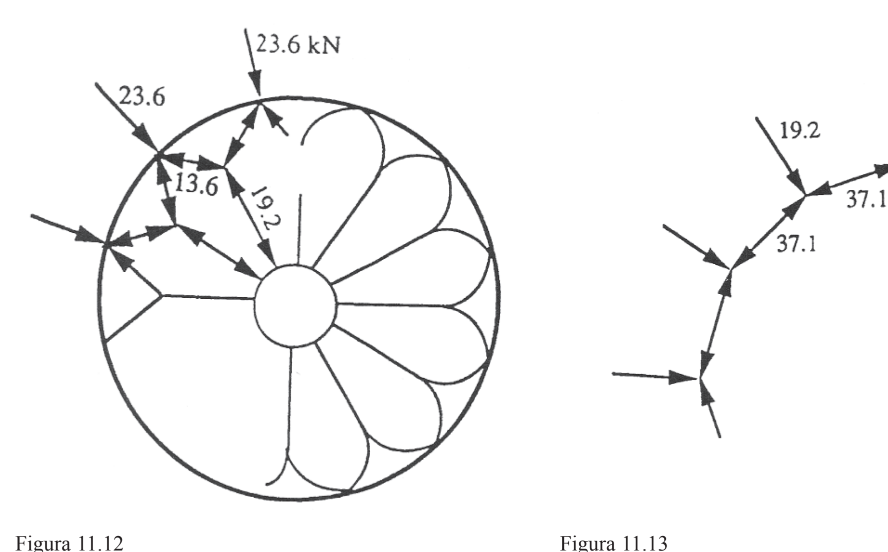


Figura 11.12
Fuerzas en un rosetón sencillo

Figura 11.13
Fuerzas en el anillo interior

En los extremos de los pétalos se pueden formar triángulos de diferentes proporciones, pero para cualquier ángulo que se suponga se obtiene la misma conclusión, esto es que las cargas en los «radios» y en los extremos triangulares de los «pétalos» está en torno a 20 kN, y probablemente el doble en el anillo central (compárese con los valores indicados en la figura 11.12).

Notre Dame de Mantes

El rosetón de Mantes (ca. 1180) dibujado en la figura 11.14, tiene un diámetro de 8 m; supondremos que toda la tracería de fábrica tiene una sección de 250 × 250 mm. Para una presión de viento de 2 kN/m² la carga transversal total *W* es de 32π, esto es 100,5 kN. Como la relación *d/4t* = 8, la ecuación (2) da un valor

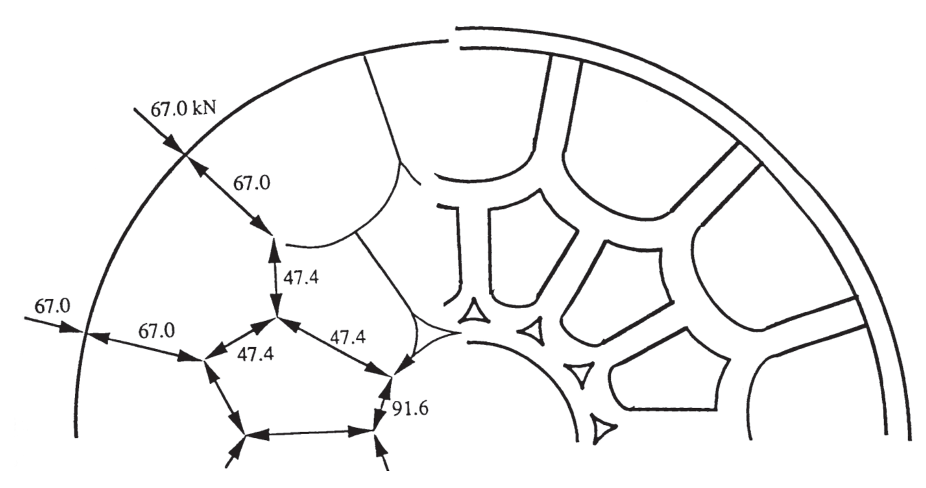


Figura 11.14
Rosetón de Notre Dame de Mantes

de H^* = 804 kN y cada uno de los 12 radios exteriores empujará contra la fábrica que rodea el hueco con una fuerza de 67,0 kN. En la parte izquierda de la figura 11.14 se muestra una estructura de elementos rectos, formando un esqueleto resistente «razonable» contenido dentro de la fábrica real curvada; una simple triangulación de fuerzas lleva a los valores indicados en la figura. La fuerza a la que está sometido el anillo interior (el dodecágono) tiene un valor de 91,6 kN; la tensión media de compresión es del orden de 1 N/mm^2.

El hastial

La figura 11.15 muestra un rosetón incluido en un hastial, quizá de un transepto sin naves laterales; si esto es así, los estribos pueden estar colocados contra la fábrica sin necesidad de arbotantes. Con o sin arbotantes, el sistema de contrarresto experimentará una ligera deformación de manera que el hueco que inicialmente es circular adquirirá forma ovalada; la deformación puede no ser evidente a simple vista, pero en la práctica la deformación puede ser de varios centímetros. El entramado de la ventana está representado esquemáticamente en la figura 11.16 (a) por una cruz. De una manera exagerada, la deformación de la ventana tenderá a comprimir los radios verticales, mientras que los radios horizontales se separarán del apoyo en sus extremos.

Por el contrario, si el entramado tiene un anillo central de fábrica, como se representa de manera simplificada en la figura 11.16 (b), la deformación de la ventana provocará que dicho anillo se deforme a su vez acomodándose al movimiento. Puede verse en la figura 11.16 (b) que el cuadrado central se ha convertido en un rombo; en las figuras 11.12 y 11.13 el dodecágono regular inscrito en el anillo de fábrica se achatará pero continuará siendo un elemento comprimido satisfactorio.

Resulta interesante señalar que si en la figura 11.16 (a) se gira la cruz 45º (y al menos existe un ejemplo con ese tipo de disposición), en ese caso la deformación de la ventana, hasta el primer orden, no afectará a los radios diagonales.

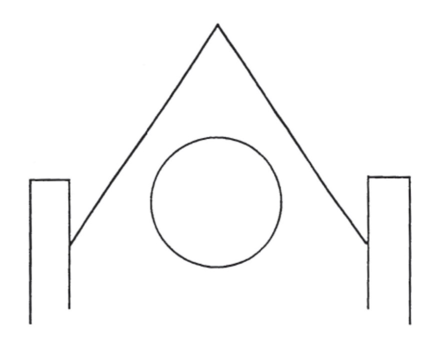
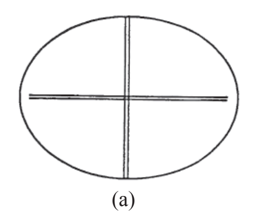
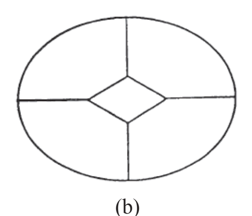


Figura 11.15
Rosetón en un hastial





(a) (b)

Figura 11.16
Distorsión de un rosetón

Conclusiones

La carga principal que debe soportar un rosetón es la debida a la acción del viento. Los elementos del rosetón están formados por piezas de piedra relativamente pequeñas y la cohesión de la unión debe asegurarse mediante el empleo de espigas de unión, de modo que las fuerzas interiores provocadas por la acción del viento puedan transmitirse de una piedra a otra. Por otra parte, las piezas que forman el perímetro de la ventana deben estar firmemente unidas a la fábrica del muro que la rodea.

La ventana resistirá la presión transversal debida al viento con todos sus componentes comportándose de manera solidaria actuando como un arco adintelado, de modo que se forma un sistema de fuerzas de compresión contenidas en el espesor de los nervios de la ventana. Estos elementos pueden seguir un trazado curvo, pero su geometría debe permitir que se pueda imaginar un «entramado» de elementos comprimidos contenido en su espesor. Los miembros del rosetón empujan contra la fábrica circundante, de manera que deben permanecer «apretados» para transmitir las cargas del viento. En la práctica, la

geometría del hueco que define el rosetón se distorsionará como consecuencia de la retracción del mortero, de asientos de la cimentación, y otras imperfecciones impredecibles; el propio rosetón deberá poseer una geometría flexible para acomodarse a esas deformaciones. Esta flexibilidad está garantizada en un rosetón cuyos radios están soportados por un pequeño anillo interior de fábrica.

12

Truesdell y la Historia de la Teoría de Estructuras

Todos los ingenieros sufren de paranoia; pero aunque un ingeniero sea paranoico, puede ser en realidad el último del escalafón, «el ídolo más bajo en el fuste del tótem». Desde luego, el físico sabe que es significativamente superior al ingeniero —tanto es así que los problemas de ingeniería apenas son dignos de la atención de los físicos. De hecho, los problemas del ingeniero son tan triviales que, en su gran mayoría, son ignorados por el físico. De la misma manera el matemático sabe que si los problemas de la física se formularan correctamente, podrían resolverse sin el feo recurso del experimento real, o sin la necesidad de experimentación virtual mediante un ordenador.

Así, pues, existe una jerarquía establecida en el campo de las ciencias físicas (aunque algunos matemáticos preferirían que su materia se considerase dentro del campo de las humanidades): el matemático está por encima del físico, que a su vez está por encima del ingeniero. Uno se acuerda del juego en el que dos niños deben elegir entre ser A, B o C. Si A > B > C, hay un claro ganador en cada jugada, o incluso un empate si los niños eligen lo mismo —obviamente la mejor estrategia para ambos niños sería elegir A. Sin embargo, en el juego real se utiliza una regla curiosa (matemáticamente curiosa) y es que, a pesar de que A, B y C son diferentes, A > B > C > A. Las *tijeras* cortan el *papel*, el *papel* envuelve la *piedra*, la *piedra* despunta las *tijeras*. El ingeniero paranoico se esfuerza siempre, aunque sabe que ocupa el lugar más bajo y soporta a todos los que están por encima —de hecho aquellos que están arriba no podrían existir sin el apoyo del ingeniero— el ingeniero se esfuerza por demostrar, aunque sólo sea para sí mismo, que de alguna manera es superior al matemático, y desde luego al físico. Y de hecho, en ocasiones, el ingeniero se convierte en físico o matemático, con el fin de obtener información que de otro modo no tendría a su disposición.

En paralelo con esta jerarquía ficticia en las ciencias físicas, hay otra en las humanidades —y todos los que trabajan en el campo de las humanidades bien pueden considerarse superiores a todos los científicos. Sin duda, puede ser difícil determinar el orden entre un filósofo, un musicólogo y un teólogo, pero un historiador, digamos específicamente un historiador de la ciencia, sabe que está en un plano muy superior al de aquellos cuya historia estudia.

Los científicos en activo no comparten esta opinión, y Truesdell, como matemático aplicado, era muy consciente del desprecio que podía despertar por huir del trabajo propio de un matemático para estudiar su historia (Truesdell 1984, vii). Cuando la inspiración para la investigación se agota, el científico puede «degenerar en un filósofo de la ciencia». Al mismo tiempo, un científico como Truesdell, bien podría confesar que «no está formado en la filosofía del aula»; así el científico renegado será visto con

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Truesdell and the History of the Theory of Structures». En: *Essays in the History of Mechanics,* A. Becchi, M. Corradi, F. Foce y O. Pedemonte Eds. (Basel: Birkhäuser, 2003): 9–19. Traducción de Paula Fuentes González.

recelo tanto por el científico en activo como por el historiador cualificado. Sin embargo, es un hecho que (por citar sólo un ejemplo) el historiador profesional es capaz de dar una explicación coherente de la obra de Newton (y Westfall (1980) ofrece un buen modelo), pero las matemáticas se desarrollaron tan rápidamente que el historiador profesional no puede hacer una descripción adecuada del trabajo de mediados del siglo XVIII (de la obra de Euler, por ejemplo). Existe, pues, una inmensa carencia de un estudio «profesional» histórico de este periodo —una carencia compensada verdaderamente por el trabajo del propio Truesdell.

Truesdell llegó tarde a la historia de la mecánica de sólidos; cuando revisó la *Historia* de Timoshenko (1953), aún no había leído cuidadosamente el trabajo fundamental de Saint-Venant de 1856 (Truesdell 1984, 252). Sin embargo, en 1960 tenía ya una comprensión completa de la historia de *The rational mechanics of flexible or elastic bodies* (La mecánica racional de cuerpos flexibles o elásticos), como lo demuestra el volumen con ese título publicado como parte de la *Opera Omnia* de Euler. (El título completo de Timoshenko es *History of strength of materials, with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures* (Historia de la resistencia de los materiales, con una breve reseña de la historia de la teoría de la elasticidad y de la teoría de estructuras); estos tres temas (separados) se distinguen a continuación.) Timoshenko había leído a Saint-Venant (1864), y también a Todhunter y Pearson (1886, 1893), y había añadido material de los siguientes 75 años más o menos; todavía había grandes lagunas, pero Truesdell confesó que fue incapaz de dejar de leerlo. Truesdell en su propio libro publicado siete años más tarde (1960) compensa las lagunas; al mismo tiempo se altera el énfasis sutilmente. Como admitió Truesdell, Timoshenko se dirigía a los ingenieros, y

> dependía fuertemente de la insuficiente formación de los «ingenieros» estadounidenses... aunque sus libros (incluyendo sus otros libros técnicos) están casi totalmente desprovistos de originalidad, sirvieron para dar a conocer a los ingenieros mecánicos y civiles estadounidenses la teoría y la historia que de otra manera era poco probable que encontraran (Truesdell 1984, 253).

Truesdell, por el contrario, se preocupa específicamente de la teoría matemática, y de la teoría de la elasticidad.

El rechazo de Truesdell a los ingenieros estadounidenses por ser poco conocedores de la teoría y la historia de la ingeniería está por supuesto justificado, y el comentario se podría haber hecho sobre ingenieros de cualquier nacionalidad. De hecho, Benvenuto defiende la misma idea: «Si le preguntamos a un ingeniero sobre los orígenes de las ecuaciones que utiliza constantemente, la respuesta sería decepcionante. Simplemente existen; no importa nada más. ¿Por qué sentir curiosidad por su origen?». Los ingenieros no están interesados en los antecedentes de su campo de estudio, y no se puede enfatizar lo suficiente que, aunque parece que matemáticos, físicos e ingenieros, para los legos, usan el mismo idioma, cada uno de ellos persigue objetivos diferentes. La confusión del lego surge del hecho de que no entiende el idioma que se utiliza —es decir, las matemáticas, y hasta cierto punto la ciencia, emplean un código que el lego no comprende. Los matemáticos dominan el código y lo manipulan para crear un sistema lógicamente interconectado del pensamiento —un sistema, por otra parte, que es capaz de generar ideas totalmente nuevas. Estas ideas no tienen por qué tener ninguna relevancia en el mundo real, pero esto no les resta potencia ni belleza (para el matemático). Y, de vez en cuando, uno de los resultados obtenidos tiene gran relevancia en el mundo real —el estudio de los números primos conduce a la creación de los códigos militares prácticamente indescifrables; el estudio de Euler de la ecuación diferencial de la elástica conduce a una fórmula para el pandeo de las columnas.

El físico, por otra parte, se mantiene siempre más cercano a la realidad. Ya sea experimental o teórico, desea establecer las leyes de la Naturaleza que rigen su mundo. Su enfoque es «científico» y no metafísico —como físico, no desea discutir el «amarillento» del color amarillo, pero sí asignar la longitud de onda numérica del color amarillo en el espectro. El físico utiliza el lenguaje codificado de las matemáticas con el fin de profundizar en la comprensión de una rama particular de la ciencia.

Por el contrario, el ingeniero utiliza el mismo lenguaje con el fin de hacer algo —ya sea para crear un circuito electrónico, un motor a reacción o un rascacielos. Con este fin, selecciona las herramientas matemáticas o físicas apropiadas y, como se ha señala-

do, como ingeniero no está interesado en la teoría que subyace la creación de esas herramientas, ni en la historia de esa teoría, sino simplemente en si sirven o no para un trabajo en particular.

Evidentemente, los límites entre matemáticas, física e ingeniería no son tan rígidos. El ingeniero se puede encontrar con que no existe ninguna herramienta para realizar una tarea en particular —pero sin embargo la tarea se debe hacer. El ingeniero no está jugando; no puede alejarse y buscar algún otro problema más manejable. Hay que encontrar una solución, y el ingeniero debe convertirse en físico y hacer experimentos, o matemático y desarrollar nuevas teorías, y si es necesario idear una herramienta adecuada. Estos tres tipos de actividades han dado lugar a tres temas principales en el estudio de lo que pomposamente se llama la *Mecánica de sólidos*; la actividad principal del ingeniero estructural tienen que ver con la *Teoría de las estructuras*; el físico estudia la *Resistencia de los materiales*; y el principal interés del matemático es la *Elasticidad*. Los títulos de estos tres temas a veces se utilizan indistintamente para describir la actividad técnica que hay detrás, pero los temas son de hecho bastante distintos (si bien, como de costumbre, con algunos bordes difusos que se solapan).

Estas divisiones no existían antes de, digamos, Galileo en el siglo XVII (aunque se pueden encontrar antecedentes). Efectivamente, existían manuales de proyecto estructural, y habían existido durante los 2.000 años anteriores, y estos manuales, desde el libro de Ezequiel, pasando por Vitruvio, hasta llegar a los libros secretos de las logias masónicas, ofrecían normas eficaces y correctas para el proyecto de grandes estructuras de fábrica (templos griegos, acueductos romanos, catedrales góticas). Las reglas eran, en esencia, reglas de proporción —por ejemplo, la altura de una columna debía ser un cierto múltiplo de su diámetro. Se había demostrado por la experiencia, que una columna proyectada de esta manera era adecuada —podía desempeñar su función en un edificio terminado sin pandear o colapsar; por otra parte, la experiencia había demostrado que la columna se podía construir de cualquier tamaño, contra de la intuición «moderna».

Las proporciones —es decir, las fracciones propias— tienen algún interés matemático, pero el matemático profesional no se detendrá en su estudio por mucho tiempo. Sin embargo, el proyecto basado en las proporciones, para cualquier tamaño, es de gran interés para el ingeniero estructural, precisamente porque ahora parece contrario a la intuición. Las reglas funcionaban porque los materiales utilizados en los edificios antiguos —piedra y, en cierta medida, madera — trabajan a tensiones muy bajas en las estructuras terminadas. Se podían construir puentes de piedra con grandes luces y catedrales de alturas asombrosas; todo lo necesario era que la forma (de un arco, de un arbotante) fuera correcta, y éste es un requisito geométrico, que debe satisfacerse siguiendo las reglas de proporción. (Sin embargo, hubo un problema matemático, conocido por los antiguos griegos, los romanos y los maestros medievales: algunas dimensiones, importantes en una obra en construcción, no se pueden expresar como una fracción propia, por lo que no se pueden medir en una escala de longitud. La demostración de Pitágoras de que la raíz cuadrada de dos es irracional es un hito matemático.)

Parece que el primero en criticar las reglas antiguas y medievales para el proyecto estructural fue Galileo. Expone el funcionamiento inexorable de la ley del cuadrado-cubo (de hecho, es imposible construir templos de una altura enorme, y un elefante está casi al límite de tamaño de los animales terrestres). El problema básico considerado por Galileo en el comienzo de sus *Dos nuevas ciencias* de 1638 es la rotura de vigas: si se conoce la resistencia a la rotura en tracción para un material determinado, ¿qué carga puede soportar una viga en voladizo construida con ese mismo material? No trata aquí las nociones de *elasticidad*, y aunque Galileo en otros lugares vislumbra las dificultades asociadas a las estructuras hiperestáticas (una viga sobre tres soportes), el problema del voladizo no es un problema del campo de la *teoría de estructuras*. Es un problema aplicado de la r*esistencia de materiales*. Huelga decir que Galileo aborda el problema de manera brillante, y su solución es la base para el desarrollo de métodos de cálculo de estructuras en las que los nuevos materiales (hierro, y más tarde acero y hormigón armado) se acercan mucho más a sus límites de resistencia.

El «problema de Galileo» despertó mucho interés durante todo el siglo XVIII, con intentos que trataban de modificar la teoría para acercarla más a los resultados de los ensayos. El problema se trataba todavía como un problema de resistencia de materiales; sólo muy de vez en cuando se apreció que los resultados no se podían aplicar directamente a, por ejemplo, una

viga con varios apoyos. Estos análisis apenas tenían interés matemático; de hecho, los grandes maestros (por ejemplo, Leibniz, o James Bernoulli), aunque aceptaron la existencia del problema, no encontraron nada que llamara su atención. Sin embargo, se planteó un problema mucho mayor (y aquí los grandes sí se comprometieron): encontrar la forma adoptada por una banda elástica cuando se la somete a unos desplazamientos determinados en los extremos. Este fue el tremendo desafío cumplido por Euler en 1744; su manejo de la espantosa ecuación diferencial no lineal de cuarto orden es casi increíble, véase, por ejemplo, Truesdell (1960, 199-). Por otra parte, el propio Euler vio que para las aplicaciones prácticas (por ejemplo para una viga de un edificio cuyas deformaciones son pequeñas, o para una columna en compresión) la ecuación básica se podía reducir a una ecuación lineal de segundo orden, con una solución sencilla. Galileo no había considerado la *forma* adoptada por un voladizo cargado (aunque otros habían hecho conjeturas); ahora, cien años después, las deformaciones elásticas de elementos estructurales sencillos se podían calcular.

La elasticidad simple se había descubierto. Sin embargo, no iba a ser hasta cien años después, con la formulación completa del tensor de tensiones tridimensional, cuando naciera la materia propia de la elasticidad, digamos con Saint-Venant en el decenio de 1850. Este campo ofreció desafíos inmediatos para los matemáticos prácticos —incluso problemas sencillos en dos dimensiones podían conducir a ecuaciones diferenciales parciales de octavo orden, mientras que sólo un puñado de soluciones tridimensionales podía obtenerse de forma exacta. Durante más de 150 años, el tema ha ocupado las mentes matemáticas más brillantes, y, con las complejidades de la anisotropía y la no linealidad, continuará haciéndolo.

A principios del siglo XIX, sin embargo, las ideas elásticas encontraron su camino en el análisis de las estructuras de los edificios. El siglo y medio desde Galileo había confirmado que su solución para la resistencia a flexión de una viga era esencialmente correcta —por ejemplo, una viga con el doble de canto era cuatro veces más resistente— pero la constante numérica que da la resistencia real a flexión debía variar según si el material era piedra o madera, para que los resultados experimentales concordasen con la teoría. Sin embargo, a partir de este trabajo surgió poco a poco la conciencia de que la *resistencia de los materiales* era algo diferente de la *teoría de estructuras*. El valor del momento flector de Galileo que provocaba el colapso de la viga se podía obtener teóricamente, usando las ecuaciones de la estática; sin embargo esas mismas ecuaciones no podían determinar los momentos flectores, por ejemplo, de una viga con tres apoyos (o de la viga de Galileo si tuviera un apoyo adicional).

Navier, en sus *Leçons* (1826), se abrió camino a través de esta dificultad, y debe ser considerado como el fundador de la teoría de las estructuras. Dado que las ecuaciones de la estática no proporcionan suficiente información para resolver un problema estructural real (hiperestático), se debe encontrar información adicional en otros lugares. Un cálculo que se podía hacer —a partir del trabajo de Bernoulli / Euler— era determinar la forma de una viga flectada, y así se disponía de un nuevo tipo de afirmaciones relacionadas con las deformaciones elásticas (pequeñas) para complementar las afirmaciones de equilibrio. Por último, la viga deformada debe respetar ciertas condiciones de contorno (una viga con tres apoyos debe permanecer en contacto con ellos) y era necesario un conjunto de afirmaciones de compatibilidad de este tipo. Navier también aplicó estas tres ideas claves de *equilibrio* estático, de las *propiedades del material* (elástico) y de la *compatibilidad* de la deformación a un entramado triangular hiperestático, y mostró que las tres afirmaciones proporcionan suficientes ecuaciones para obtener una solución a cualquier problema estructural. Esto ocurrió un siglo antes de que se dieran cuenta de que la solución de Navier no se corresponde con el comportamiento real de una estructura.

El enfoque de Navier es sencillo, pero implica un enorme número de ecuaciones. A modo de ejemplo, tres ecuaciones de equilibrio estático bastarán para determinar las fuerzas en las patas de una mesa de tres patas. Sin embargo, para la habitual mesa de cuatro patas (hiperestática), sólo es posible escribir las mismas tres ecuaciones, y la solución de Navier requiere conocer las propiedades de flexión elástica del tablero de la mesa, la compresibilidad de las patas, y así sucesivamente. Sólo cuando se ensambla toda esta información se pueden determinar las fuerzas en las patas. Las dificultades de cálculo se apreciaron rápidamente, y en la segunda mitad del siglo XIX se desarrollaron ingeniosos métodos de cálculo de las ecuaciones (esencialmente, de la resolución de

un gran número de ecuaciones simultáneas), por ejemplo por aproximaciones sucesivas, por métodos gráficos, y haciendo experimentos con modelos (no necesariamente copias estrictas a escala). Parte de este trabajo tiene una potencia intelectual auténtica, pero, en el análisis final, no tienen un contenido matemático profundo. El desarrollo de los principios energéticos, ejemplificados por los teoremas de Castigliano, es una excepción. En general, el campo de la *teoría de las estructuras* durante los dos últimos siglos se ha dejado al ingeniero. Los matemáticos y los físicos que trabajan en el campo de la mecánica de sólidos se han ocupado de las otras dos disciplinas. Al parecer Navier había resuelto el problema estructural; obtener resultados para el cálculo práctico era meramente un trabajo mecánico laborioso.

Por supuesto, el ordenador se ha hecho cargo del trabajo laborioso. Ya no es necesario conformarse con soluciones aproximadas para los problemas estructurales —ahora se pueden resolver las ecuaciones del siglo XIX, si no de forma exacta, al menos con muy buena precisión, mucho más allá de las necesidades de un analista práctico. Esas necesidades se pueden recapitular. El problema fundamental de la *teoría de las estructuras* es determinar la forma en que una estructura hiperestática traslada su carga (encontrar las fuerzas en las cuatro patas de una mesa). Una vez que se han calculado las resultantes de tensiones internas, la ciencia de la *resistencia de los materiales* se puede utilizar para dimensionar los elementos de manera que tengan una resistencia adecuada. En la práctica, este proceso puede ser iterativo, e implica el uso de las tres afirmaciones principales de *equilibrio*, las *propiedades del material* y *compatibilidad*. El ingeniero no está necesariamente interesado en las deformaciones reales de una estructura, que en la práctica pueden ser muy pequeñas: el problema estructural principal es determinar las resultantes de tensiones internas (las fuerzas en las patas de la mesa). El algoritmo de Navier (o *algorism*, como diría Truesdell) da una solución a este problema, y parece tan evidentemente correcta que tal vez no es de extrañar que pasaran cien años antes de que alguien pensara en tratar de medir el verdadero comportamiento de una estructura real.

Los primeros ensayos a escala real en pórticos de edificios se hicieron el decenio de 1920 en Londres, y los resultados fueron, en el sentido más amplio de la palabra, sorprendentes. Las resultantes de tensiones internas (en este caso, las tensiones de flexión en vigas) que se midieron en la práctica no tenían casi relación alguna con los calculados confiadamente por el calculista elástico (Navier). Los investigadores encontraron rápidamente qué funcionaba mal; mientras que las ecuaciones de equilibrio se cumplían, y las ecuaciones elásticas de deformación eran casi exactas, las condiciones de contorno utilizadas en el análisis no representaban la realidad. Un pequeño error en la fabricación, un desajuste dimensional pequeño, un inevitable esfuerzo para unir los distintos elementos durante la construcción —todo esto conduce a grandes cambios en los valores de las tensiones internas.

Volviendo al sencillo ejemplo de la mesa de cuatro patas, es cierto que el uso de elementos finitos elásticos, con la ayuda de un ordenador, conduce a predicciones precisas de las fuerzas en las patas. Sin embargo, una mesa real, prácticamente rígida, sobre un suelo real, prácticamente rígido, cojeará; si una pata de la mesa no está en contacto con el suelo por una fracción de milímetro, entonces la fuerza en esa pata es cero, a pesar de la predicción del programa de ordenador. El programa ha supuesto, sin pensarlo, que el suelo es uniforme, y que todas las patas están en contacto con él —éstas son las condiciones de contorno. Si se hubiera introducido en el ordenador una descripción precisa de las irregularidades del suelo, a continuación, el programa podría haber confirmado que una pata en particular no llevaba carga. Sin embargo, seguiría sin ser la solución del problema estructural real: la mesa se coloca al azar en un piso ligeramente irregular, de modo que cualquiera de las cuatro patas puede no estar en contacto con el suelo. Este es el problema real con el que se enfrenta el ingeniero: ¿cómo se calcula una estructura si las condiciones de contorno son desconocidas (y de hecho incognoscibles), de manera que no se puede utilizar la tercera de las afirmaciones de Navier?

Euler, en 1773, comprendió las dificultades del análisis de las estructuras hiperestáticas y, en concreto, contrastó el comportamiento de una mesa de tres patas con el de una mesa hiperestática de cuatro patas. Era consciente (explícitamente) de que si la mesa se encontraba sobre una superficie irregular, una de las cuatro patas podía no llevar carga, pero no pudo avanzar en el problema. Durante el siguiente medio siglo, otros autores prestaron atención a este problema, igualmente sin éxito. La solución de Navier en

1826 fue una revelación —en palabras de Benvenuto, se había conseguido el objetivo. Parece extraordinario que nadie señalara que no se había abordado el problema real: la determinación de las fuerzas en las cuatro patas de una mesa colocada sobre una superficie irregular. Navier supuso precisamente que el suelo era regular.

La *teoría plástica* de estructuras trata con el problema estructural real, y en retrospectiva se podría pensar que fue ideada para tal fin. De hecho, la teoría plástica fue desarrollada en primera instancia para tratar con el problema particular del cálculo de estructuras de acero —de esos pórticos cuyo comportamiento real difería tan radicalmente de las predicciones de los calculistas elásticos. El desarrollo siguió las líneas tradicionales obvias —en la teoría de estructuras sólo se pueden hacer tres tipos de afirmaciones, y esas afirmaciones se modificaron para verlas desde un punto de vista «plástico» en lugar de «elástico». Las ecuaciones básicas de *equilibrio* estático son de suma importancia, y se mantienen sin cambios. El uso de las propiedades del material se simplifica en gran medida —en lugar de una ley lineal elástica de tensión/deformación, en la teoría plástica simple no se hace mención a la deformación. En lugar de ello, se supone que el material es capaz de resistir cualquier tensión (o, más exactamente, combinación de tensiones) por debajo de un *límite de cedencia* determinado experimentalmente, en ese límite, el material se supone que es lo suficientemente dúctil como para soportar cualquier desplazamiento razonable. Por último, no se realiza ninguna afirmación precisa sobre las condiciones de contorno —el suelo en el que apoyan las cuatro patas de la mesa puede tener pequeñas irregularidades desconocidas.

Hasta hace cerca de 100 años no se descubrió que, curiosamente, era posible obviar esta última de las tres afirmaciones estructurales fundamentales. Kazinczy ensayó algunas vigas biempotradas con el fin de hallar experimentalmente qué grado de empotramiento se necesitaba para que cada viga pudiera desarrollar toda su resistencia (se sabía que cambios muy pequeños en el empotramiento alteraban notablemente las tensiones elásticas). Kazinczy descubrió que los empotramientos tenían que ser simplemente, lo suficientemente fuertes como para soportar los momentos máximos desarrollados en las vigas, y que podían sufrir pequeñas deformaciones. Del mismo modo, los experimentos realizados unos 20 años más tarde confirmaron que las cargas de colapso de vigas continuas sobre varios apoyos eran independientes de pequeños asentamientos aleatorios en los apoyos.

Así, el examen del comportamiento plástico de las estructuras implica la construcción de soluciones utilizando sólo las ecuaciones de equilibrio estático junto con el conocimiento del límite de cedencia del material. Este importante desarrollo en la teoría de estructuras pasó inadvertido para Timoshenko. Timoshenko, de hecho, menciona la plasticidad, y observa que Saint-Venant había abordado algunos problemas. Estos problemas, sin embargo, se encuentran todos en el campo de la resistencia de materiales —por ejemplo, la estimación del valor del momento plástico completo en la viga de Galileo, o la discusión sobre la torsión plástica de barras no circulares. Parece que Truesdell no hace referencia en ninguno de sus escritos a problemas plásticos. Sin duda en 1953 Timoshenko no podía ser consciente de las implicaciones de las ideas de la plasticidad para la teoría estructural; sin embargo Truesdell, debe haber tenido una razón más importante para su descuido.

Quizá sea desafortunado que la expresión «cálculo plástico», con la implicación básica de que se está realizando un análisis de colapso, haya llegado a ser aceptada como una descripción del método. El método, de hecho, se ocupa del equilibrio de una estructura en su estado de trabajo, y la roca sobre la que se fundamenta es el llamado «teorema de la seguridad». El teorema puede expresarse de forma sencilla. En una estructura hiperestática no existe un único estado que pueda observarse en la práctica (no se sabe cuál de las cuatro patas de la mesa está en el aire) —sin embargo, si el ingeniero estructural puede encontrar cualquier conjunto de fuerzas internas con los que la estructura se encuentre cómoda (se cumplen el equilibrio y la condición de cedencia) entonces esto es una demostración de que la estructura es segura. Es decir, no existe un estado de equilibrio alternativo que implique el colapso de la estructura.

Este teorema plástico no hace referencia en absoluto a las propiedades elásticas del material de la estructura. Los espléndidos desarrollos matemáticos en el campo de la elasticidad que se produjeron después de 1826 tienen a lo sumo una importancia marginal para la actividad del ingeniero estructural; tal vez las deformaciones de trabajo se puedan calcular de manera aproximada, pero la teoría elástica no es de ninguna ayuda en la estimación de la resistencia final de

una estructura dúctil. Truesdell fue inmensamente erudito en muchos campos, no sólo en la elasticidad, pero parece que no entendió el sumamente interesante problema de las estructuras hiperestáticas. Su actitud tal vez queda ejemplificada en su denigración de Pearson. Pearson, profesor de matemática aplicada, reunió tras la muerte de Todhunter, las 2.000 páginas de *A history of the theory of elasticity*, Historia de la teoría de la elasticidad, (Todhunter y Pearson 1886, 1893). Truesdell está particularmente descontento con el frontispicio de Pearson para este trabajo que muestra dibujos de superficies de fractura de probetas de hierro fundido —y esto en un libro cuyo título usa la palabra *teoría*. El interés de Truesdell estaba en las matemáticas de la teoría de la elasticidad; por el contrario, Pearson era consciente de que el objetivo de toda la ciencia de las estructuras era analizar y proyectar construcciones reales. Truesdell parece que comprendió perfectamente todos los aspectos de la teoría de la elasticidad, pero para él era una ciencia cerrada, sin aplicación práctica.

Sin embargo, fue alguien que trabajaba como matemático, Gvozdev, quien estableció en 1936 los teoremas fundamentales de la teoría plástica de estructuras (incluyendo el teorema de la seguridad ya citado). La obra no se publicó hasta 1938, con difusión muy limitada, y en ruso. En las décadas siguientes los ingenieros dominaron, mecánicamente, los elementos esenciales del cálculo plástico e incluso, en 1948, se modificaron las normativas de construcción en el Reino Unido para permitir oficialmente el nuevo método. Pero todo esto ocurrió sin ningún marco teórico firme; fueron incapaces de asumir el papel del matemático para crear por sí mismos los potentes teoremas de Gvozdev (que ellos ignoraban). Tal vez lo habrían hecho con tiempo —pero, de hecho, la nueva teoría estructural se estableció a partir de 1950 como el resultado de las aportaciones de matemáticos, físicos e ingenieros. Tal vez este sea un ejemplo de la verdadera resolución del matemáticamente imposible A > B > C > A.

13
Wren, Hooke y Asociados

Después del gran incendio de Londres de 1666, Christopher Wren fue nombrado *surveyor* (director) de la reconstrucción de la Catedral de San Pablo, y Robert Hooke era su ayudante, (*assistant surveyor*). Por su parte, Hooke era además surveyor de la reconstrucción de la City de Londres, de hecho, ambos colaboraron estrechamente en la redacción de proyectos de arquitectura —los diarios de Hooke correspondientes a esa época registran reuniones casi diarias con Wren en las obras o en los cafés.

El ritmo al que se construía no se parecía a nada realizado anteriormente con lo que hubo que abandonar el sistema de trabajo medieval. En lugar del «maestro» que realizaba sus propios proyectos, dirigía a sus propios obreros y, probablemente, tenía su propia cantera de la que extraía la piedra, el «arquitecto señor», una figura del Renacimiento, hizo su aparición en Inglaterra en la segunda mitad del siglo XVII. Íñigo Jones fue el precursor, pero, de hecho, Wren fue el primer arquitecto moderno, un profesor de Astronomía que nunca había trabajado en una obra. En unos pocos años Wren estableció un sistema de trabajo similar a la práctica moderna de la arquitectura. Teniendo como socios a Hooke y Woodroffe, y más adelante Hawksmoor y otros, fueron capaces de llevar adelante la construcción de San Pablo (una obra que se prolongó durante 45 años con un coste enorme) y, al mismo tiempo, proyectar y dirigir la construcción de 56 iglesias parroquiales (51 en al City, y otras 5 justo en el extrarradio), y de otros edificios de importancia tanto en Londres como en los alrededores.

Además, en contraste con los contratos de proyecto y construcción medievales que se realizaban con un único maestro, Wren y Asociados, realizaban los proyectos, y, después, se empleaba a distintos contratistas de una forma moderna (en un primer momento la mayoría de los contratistas fueron los maestros y obreros medievales). Ante la nueva situación se crearon nuevas formas de contratar y Wren estableció tres tipos de contrato que aún se emplean hoy en día; era preciso presupuestar la obra realizada, con lo que aparece la figura del moderno aparejador, *quantity surveyor* (el «*measurer*», medidor, como era llamado por Wren en su trabajo).

Así, a partir de 1670, el contratista —sucesor del maestro medieval— aporta su capacidad técnica en la construcción, participando por ejemplo en el proyecto de las cimentaciones. El aspecto externo de la construcción era responsabilidad exclusiva del arquitecto, quien sólo en raras ocasionas exploró la aplicación de la «ciencia» —para decidir la forma adecuada de una cúpula de fábrica, o calcular la dimensión de los estribos de un puente en arco.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Wren, Hooke and Partners». En: *Proceedings of the First International Congress on Construction History,* S. Huerta, ed. (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2003): 3–9. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

La práctica medieval

La obra comenzada en 1631 para construir el St. John's College en Oxford nos sirve para ilustrar el modo medieval de construir. El College contrató al cantero Richard Maude para que proyectase y construyese una nueva ala por 1.005 £. Cuando en 1632 se llevaban gastadas 700 £ se decidió aumentar el tamaño del proyecto; el ala pasaría a formar una de las caras de un patio cuadrado (el Canterbury Quadrangle), con lo que el presupuesto inicial se aumentó hasta alcanzar las 3.200 £. Es probable que Richard Maude careciera de capacidad financiera o necesitase ayuda en el proyecto, ya que se asoció con Robert Smith y Hugh Davies; a este último se le atribuye el proyecto de la ampliación. Al cabo de un año sin embargo, la asociación fracasó financieramente —evidentemente, el precio fijo del contrato se había calculado mal. Un nuevo cantero fracasó también en pocos meses, y en 1634 el College se hizo cargo de las obras.

Un miembro (*fellow*) del College, John Lufton, se hizo con el control directo de la obra. Contrató a un nuevo maestro cantero, John Jackson, con quien llegó a un acuerdo que incluía el pago por obra realizada junto con trabajos a destajo —un tipo de acuerdo que años más tarde emplearía Christopher Wren. En aquel momento escaseaban los obreros especializados y el College contrató a los maestros Timothy Strong y su hijo Valentine, a los que (en secreto) pagaba más que lo que se acostumbraba a los maestros locales (la familia Strong poseía canteras de piedra caliza en Taynton y en Little Barrington, pueblos situados a unos 30 km de Oxford). Así, los Strong, maestros constructores reconocidos capaces de proyectar y construir edificios con su propia piedra, se contentaron con trabajar como contratistas (la familia trabajó de ese modo más adelante para Wren en la catedral de San Pablo y en las iglesias de la City).

Unos treinta años más tarde, Wren, joven profesor Savilian de Astronomía en Oxford, comenzó a trabajar en arquitectura —primero en 1663 proyectando la capilla del Pembroke College de Cambridge para su tío el obispo de Ely y, a continuación, el teatro Sheldonian de Oxford (para el que ideó y construyó con éxito la gran armadura de madera que forma la techumbre). Proyectó después un nuevo patio para otro College de Oxford, el Trinity, donde por primera vez estableció contacto con la familia Strong —el contratista fue Timothy, nieto de Timothy, y uno de los seis hijos de Valentine, todos ellos canteros.

El gran incendio de 1666

A lo largo del siglo XVII, diversos personajes (algunos científicos) además de Wren dedicaron su tiempo a la arquitectura, sin embargo, hay que considerar a Wren como el primer arquitecto en el sentido moderno del término; alguien capacitado y dispuesto a hacerse cargo del proyecto completo de un gran encargo sin haber sido aprendiz dentro del oficio. (Íñigo Jones, artesano artista que se hizo famoso como proyectista de escenarios, había recibido unos años antes encargos de obras de arquitectura clásica, mereciendo destacarse los proyectos del Banqueting House, de Whitehall, y del gran pórtico de la antigua catedral de San Pablo.) Wren poseía una formación libresca, además de la estancia de un solo año en París en donde estudió diversos edificios y monumentos, en particular las cúpulas, desconocidas en Inglaterra. En 1659 Lemercier había terminado la cúpula de la Sorbona de 12 m de diámetro. La cúpula de Mansart para la iglesia de Val-de-Grâce, de 17 m de diámetro, se terminó en 1650, aunque su cúpula para los Inválidos, de 28 m, no se construyó hasta finales del siglo. (La cúpula de Wren para la nueva catedral de San Pablo salva 34 m de luz, algo más que la de Santa Sofía; la cúpula de Miguel Ángel para San Pedro de Roma tiene 42 m de diámetro.)

Anteriormente ya habían consultado a Wren sobre el estado de la antigua catedral de San Pablo, que había sufrido importantes desperfectos durante la Commonwealth y, en la primavera de 1666, después de su vuelta de París, propuso la construcción de una cúpula sobre el crucero de la catedral. El gran incendio de 2 de septiembre de 1666 impidió realizar esta propuesta, pero, por supuesto, la idea no se olvidó —en 1668 fue nombrado arquitecto de la nueva catedral. Después del incendio, fue uno de los tres miembros de la comisión encargada de evaluar las obras de reconstrucción necesarias en la City de Londres y, en 1670, junto con Robert Hooke y Edward Woodroffe, se les encargó la reconstrucción de 56 iglesias de la City. Al mismo tiempo Robert Hooke era el surveyor de la reconstrucción de todos los demás edificios de la City.

La gran cantidad de edificios a reconstruir debido a la magnitud de la destrucción superaba la capacidad

de los contratistas cualificados establecidos en la City. Para compensarlo, se aprobó la Act of Parliament de 1666 que reducía la exclusividad de que gozaban los gremios de canteros. Antes del Acta, únicamente los ciudadanos londinenses (*freemen*) podían trabajar como canteros; a partir de 1666, los «extranjeros» pudieron establecerse en la ciudad y trabajar hasta que la reconstrucción estuviese terminada —en cualquier caso, después de siete años trabajando adquirían la ciudadanía. La familia Strong se aprovechó de inmediato de esta situación. Thomas, el mayor de los hijos de Valentine, y Edward, el cuarto, abrieron un almacén cerca de los muelles de San Pablo, al que enviaban la piedra por barco desde sus canteras en Taynton. La piedra estaba a la venta para cualquier constructor que la necesitase en las obras de reconstrucción, pero la familia Strong también ofrecía sus servicios como contratistas. La familia prosperó hasta el punto que Thomas ingresó en el gremio de canteros (*Mason's Company*) en 1670; murió en 1681 y después Edward y su hijo, también llamado Edward, se hicieron cargo del negocio.

Los «socios» de Wren

A pesar de la afluencia de canteros, el número de maestros «medievales» capaces de proyectar las 56 iglesias necesarias era insuficiente. Wren, por su supuesto, se hizo cargo, con mano firme, del proyecto de San Pablo, con alteraciones sustanciales antes y después del comienzo de las obras en 1675, con el asiento (por Thomas Strong) de la piedra de las cimentaciones. La decisión de demoler las ruinas del viejo San Pablo se había tomado ya en 1668, pero el trabajo resultaba muy laborioso y, tres años después, Wren recurrió al empleo de pólvora para derribar la obra de fábrica. Wren supervisó personalmente cuatro o cinco de estas explosiones, pero en la última que se realizó en 1672, Woodroffe empleó más explosivo del necesario y se produjeron daños en las casas del entorno de la catedral.

Este incidente nos da una idea del modo en que funcionaba la sociedad de Wren. El cargo de Woodroffe era el de ayudante del director (assistant surveyor) de San Pablo y, además, desde 1662, era surveyor del Deán y Cabildo de Westminster; su trabajo para San Pablo se cargaba a las cuentas de esta catedral. Análogamente, Hooke, además de su trabajo como asociado y su exigente dedicación a la Royal Society (por no mencionar sus importantes contribuciones científicas), también trabajaba como arquitecto independiente —su proyectos más importantes comprenden el proyecto y la dirección de la Montague House y del nuevo gran hospital de Bethlehem en Moorfields. Para estos trabajos empleaba a personal del estudio de Wren —por ejemplo, a John Tillison que era el socio encargado de la gestión de la contabilidad y los pagos, y de la compra de materiales. (Woodroffe falleció en 1675 y, posteriormente, Hooke fue nombrado surveyor del Dean y Cabildo de Westminster entre 1691 y 1697; Wren fue nombrado en 1699 surveyor de las obras de reparación de la Abadía de Westminster).

Los acuerdos de Wren con sus socios puede que fuesen parecidos a los que se practican hoy día en un estudio de arquitectos. Es decir, Wren controlaba todos los proyectos en que su estudio era directamente responsable —las 56 iglesias eran responsabilidad de Wren sin importar cual de los socios fuese el autor del proyecto. Así, la firma de Wren en los dibujos de algunas iglesias ha hecho que hasta hace poco se le negara su autoría a Hooke, pero ahora está claro que Hooke fue el autor de varias de ellas (St. Benet's y Paul's Wharf, construidas por Thomas y Edward Strong; St. Edmund the King (aguja de Hawksmoor, que se convirtió en «socio» más adelante); la torre de St. Margaret Lothbury; probablemente St. Martin Ludgate y St. Peter upon Cornhill; y St. Michael Crooked Lane ya demolida). Del mismo modo, el Monumento conmemorativo del gran incendio, situado en el extremo norte del Viejo Puente de Londres (en el siglo XIX el puente se desplazó ligeramente aguas arriba), habitualmente atribuido a Wren, es en realidad obra de Hooke.

Los socios trabajaban además por su cuenta recibiendo los honorarios correspondientes (Hooke recibió 250 £ por la Montagu House y 220 £ por Bedlam). Se usaban los medios del estudio y, sin duda, la oficina de Wren recibía un pago por su uso.

Condiciones contractuales

Antes de finales del siglo XVII no existía en Inglaterra la figura del arquitecto consultor como intermediario entre el cliente promotor y el constructor. Un College de Oxford, como el St. John's en 1631,

buscaría un cantero capaz de realizar tanto el proyecto como la construcción, y se firmaría un contrato de proyecto y construcción por un precio fijo acordado.

De todos modos, en época medieval la figura del arquitecto consultor no era desconocida. El Carpintero Real William Hurley, realizó en 1334 el proyecto, completamente original, de la linterna de madera de la catedral de Ely; no obstante, la linterna octogonal fue construida por un maestro carpintero local, Geoffery de Middylton. A finales de siglo, en 1394, el Maestro Cantero Real, Henry Yeveley, estaba a cargo de la remodelación de Westminster Hall (cuya techumbre de armaduras de palomillas fue proyectada por otro Carpintero Real, Hugh Herland). Un siglo más tarde John Wastell, que proyectó y construyó las bóvedas de abanico de la capilla del King's College en Cambridge, consultó al menos a uno de los hermanos Vertue, que habían construido unas bóvedas similares en Bath y en la abadía de Westminster. No obstante, en todos estos casos, los arquitectos consultores eran en realidad maestros constructores —un maestro instruyendo a otro maestro.

Las condiciones anómalas del contrato de ejecución para el Quadrangle de Canterbury después de 1634 puede que hayan sido únicas —el proyecto ya había sido realizado por un maestro constructor (que se había arruinado durante la obra) con lo que el cliente no necesitaba un arquitecto director y podía contratar a los obreros directamente. De todas maneras, si un arquitecto se encargaba del realizar el proyecto (en el sentido moderno del término), el cliente necesitaba contratar un constructor que se comprometiese a trabajar bajo la dirección del arquitecto, de manera que toda la organización de la construcción se vio forzada a abandonar el modelo medieval en favor de algo parecido a la organización moderna. Esto es, el arquitecto haría los dibujos de la nueva obra, y negociaría, en representación del cliente, las condiciones del contrato con los constructores.

La aparición del arquitecto profesional produjo un cambio fundamental en la práctica. El arquitecto controlaba la construcción del edificio, pero ya no tenía ninguna responsabilidad financiera como le sucedía al maestro medieval —el maestro medieval trabajaba ahora contratado por el cliente, pero el proyecto no era responsabilidad suya. A lo largo del siglo XVII se crearon diferentes tipos de contratos, y en el estudio de Wren se desarrollaron estrategias para acometer grandes obras, que son similares a las empleadas en la práctica contemporánea.

La práctica medieval de abonar un precio por toda la obra se mantuvo bajo la forma de los contratos a precio cerrado. El sistema se prestaba a abusos —por parte del contratista si pedía una cantidad elevada para obtener beneficios excesivos, o, por el contrario, como ocurrió en el Quadrangle de Canterbury, el contratista podía arruinarse por una mala previsión. De todos modos, se trataba de un procedimiento muy útil en subcontratas concretas —por ejemplo, el plomo para cubrir una techumbre de madera. A partir de esta práctica se desarrolló un procedimiento poco satisfactorio de pago por tasación. Un perito independiente valoraba la obra realizada, lo que exigía una alto grado de confianza. En otro modo, el de abono por día trabajado, también se exige un alto grado de confianza, aunque se empleaba en casos en los que resultaba difícil hacer un presupuesto previo (el caso de las demoliciones, por ejemplo), pero en los que el arquitecto podía controlar estrechamente la obra, y acordar el pago por el número de jornales empleados. Con el tiempo, el pago por obra realizada evolucionó hasta convertirse en la mejor opción en el caso de grandes obras, siendo un método similar al que se emplea actualmente —se acordaban con el constructor unos precios unitarios para cada una de las partidas de obra incluidas en el contrato y, cuando se finalizaba la obra, el «medidor» (measurer) realizaba la valoración cuantitativa y cualitativa. Actualmente el aparejador (quantity surveyor) es un profesional independiente, sin embargo, Wren tenía en su estudio a su propio «medidor», John Scarborough, y el resto de los socios de Wren empleaban sus servicios en sus proyectos «privados» (como hizo, por ejemplo, Hooke durante la construcción de Bedlam). Por su parte, Scarborough realizaba las mediciones de otros proyectos por cuenta propia.

Toda esta organización permitió a Wren emplear a un gran número de personas en la obra de San Pablo —en ocasiones llegaron a participar dos o tres contratistas importantes (por ejemplo el Maestro Cantero Real Joshua Marshall y Thomas Strong trabajaron desde el comienzo de las obras, empleando a más de doscientos hombres entre peones y oficiales). A lo largo de la construcción de San Pablo, hubo dificultades para hacer frente a los gastos, ya que los presupuestos eran elevados; después de veinte años de obras el Building Fund de San Pablo tenía deudas

muy importantes. La mayor parte de la deuda era la contraída con los contratistas principales que, en 1694 hicieron una propuesta sorprendente —que las deudas se considerasen como préstamos que ellos mismos habían hecho al Building Fund. De este modo las obras pudieron continuar con préstamos a un interés del seis por ciento, y de esta manera en los libros de contabilidad más de 24.000 £ pasaron de ser deudas a considerarse préstamos. Por ejemplo, se registró que Strong había prestado la considerable cantidad de 2.500 £ —los contratistas se habían hecho ricos. Pero no de un modo exagerado; 24.000 £ respecto a un gasto total (en 1694) de en torno a medio millón de libras suponen el cinco por ciento; los beneficios de los contratistas fueron perfectamente razonables. De ese modo las obras pudieron continuar y una nueva Acta de 1697 garantizó en cierta medida la seguridad financiera en el futuro; de hecho, el dinero prestado por los contratistas terminó por devolverse.

La aportación de la ciencia

En su juventud, Íñigo Jones pasó varios años en Italia donde llegó a dominar los estilos italianos (sobre todo el de Palladio); a partir de los treinta años era un reputado proyectista de escenarios teatrales, antes de comenzar a proyectar edificios en lugar de escenarios pintados. Parece ser que Scarborough, el «medidor», también había trabajado como jefe de obras. De Woodroffe, que murió en 1675, no se sabe gran cosa; su sucesor, Hawksmoor, comenzó a trabajar a los dieciocho años, hacia 1679, como empleado de Wren. De hecho, Hawksmoor es el primer arquitecto inglés al que se le enseñó la práctica de la arquitectura en sentido moderno —no podía haber sido de otra manera ya que antes de Wren no existía esta práctica arquitectónica.

Por el contrario, Wren y Hooke eran unos *gentlemen* (Wren más que Hooke) y se habían formado como científicos. Ambos asistían de modo regular a las reuniones de la nueva Royal Society; de hecho, la Royal Society sobrevivió por los pelos gracias al nombramiento de Hooke como su Secretario permanente en 1677. Como director de su estudio, Wren tenía que enfrentarse a toda una serie de cuestiones administrativas, similares a las que ocupan a un arquitecto contemporáneo, desde supervisar el trabajo de sus empleados y mantener reuniones con sus asociados, hasta la elección de los materiales (incluidas las visitas a las canteras), y garantizar la disponibilidad económica —al mismo tiempo, realizó diversas contribuciones científicas. Hooke, como *curator* (encargado) de los experimentos y después Secretario era el único científico profesional con sueldo de la Royal Society; era un trabajo muy exigente y, al mismo tiempo, realizaba sus propias investigaciones científicas y su práctica de arquitecto (incluyendo la supervisión casi continua de los trabajos de reconstrucción de la City).

Pese al trabajo científico de Wren y Hooke, únicamente hay uno o dos casos en que se aplicase en la práctica arquitectónica el resultado de sus investigaciones. Una razón fundamental para ello está en el tipo de materiales que se empleaban en la construcción: la piedra y la madera. Una estructura de piedra, ya sea un pequeño puente en arco o una gran catedral, no presenta tensiones altas —esto es, la seguridad de una estructura de piedra no depende de la resistencia del material. Tuvo que pasar un siglo para que el hierro se empleara como un material estructural resistente (Coalbrookdale), y otro siglo más para que el acero y el hormigón armado se emplearan en la construcción de estructuras porticadas. Estos materiales «modernos» se usan de forma económica y se les hace trabajar a tensiones mucho más altas que a la fábrica, con tensiones de servicio que alcanzan una fracción considerable de la de rotura. Así, es posible emplear piedra de baja calidad (en lo que se refiere a su resistencia) en la construcción de una gran obra de fábrica, y las ideas modernas acerca de resistencia no tienen mucha importancia. Las reglas de proyecto para las fábricas de la Antigüedad y de la Edad Media —desde los templos griegos, pasando por Vitruvio, hasta las catedrales góticas— tienen que ver con la geometría; la forma correcta, más que la resistencia, es lo que confiere estabilidad a las construcciones.

Las consideraciones geométricas eran fundamentales en la concepción arquitectónica, y las reglas que Vitruvio enuncia de modo explícito se transmitieron de la arquitectura romana a la Renacentista; en el siglo XVII no se consideraba la idea de fuerzas dentro de una estructura (aunque Galileo hubiese estudiado en 1638 la rotura de una viga en voladizo). Wren sabía que los arcos necesitaban un contrarresto adecuado en sus arranques, pero su aproximación al problema se

basaba en formas y proporciones, y no llega a enfrentarse a la idea de fuerza como vector. En realidad, no hay ninguna necesidad de realizar un análisis «moderno» de un arco a menos que su luz sea muy grande; los arcos pequeños, las villas de Paladio y las clásicas arquerías de las catedrales, todos ellos tienen un «coeficiente de seguridad» generoso en relación con su forma. De hecho, en un edificio proyectado según las clásicas reglas geométricas se pueden distorsionar las reglas siguiendo el capricho del arquitecto, y la construcción seguirá siendo una estructura perfectamente viable. Por esa razón, Íñigo Jones, que dominaba las reglas clásicas de proporción gracias a sus proyectos escenográficos, pudo emplear con impunidad esos mismos diseños en la construcción de edificios.

Cuando se trata de salvar grandes luces, ya sea con arcos bidimiensionales o cúpulas tridimensionales, la libertad del arquitecto se reduce y entonces hace falta intentar comprender con claridad la génesis de las reglas de proporción. La famosa solución que Hooke dio al problema del arco fue la de hallar su forma adecuada —el anagrama latino que publicó en 1675 se refiere a «the true Mathematical and Mechanical form of all manner of Arches for Building, with the true butment necessary to each of them», la verdadera forma matemática y mecánica de todo tipo de arcos en los edificios, con el verdadero estribo necesario para cada uno de ellos, donde la última frase plantea el problema del empuje sobre los estribos. Descifrado y traducido, el anagrama dice: «del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se mantendrá el arco rígido». En otras palabras, si se toma un hilo flexible y se le carga con una serie de pesos, éste adquirirá una determinada forma; esa misma forma invertida, será la del arco perfecto para resistir las mismas cargas. La forma, para un cable de sección uniforme, es la de la catenaria, sin embargo, ni Hooke ni sus coetáneos en la Royal Society fueron capaces en aquel momento de obtener la expresión matemática de esa curva.

Hooke presentó su principio a la Royal Society en 1670 y, un año después generalizó su análisis de un arco de dos dimensiones al problema tridimensional de una cúpula (de espesor uniforme). Afirmó, sin demostrarlo, que la forma más adecuada era la de un conoide parabólico-cúbico (la curva $y = ax^3$ girada en torno al eje y). (La afirmación no es correcta, pero la diferencia entre la superficie propuesta por Hooke y la superficie matemática exacta es muy pequeña.)

Wren había experimentado ya con una pequeña cúpula (13 m de luz) para St. Stephen Walbrook (1672–9; el maestro de obras fue Thomas Strong). La cúpula no presentaba problemas estructurales —se construyó encamonada, con listones y yeso; parecía más bien un proyecto escenográfico. Es bien sabido que Wren realizó numerosos proyectos, muy diferentes unos de otros, para la cúpula de San Pablo de 34 m de luz, perfeccionando la solución a lo largo de treinta años. Un dibujo de 1693 muestra una cúpula triple (que no se construyó); la cúpula intermedia tiene la forma $y = ax^3$, como se indica explícitamente en los ejes dibujados. El punto esencial del principio de Hooke es que la cadena colgante, y su equivalente tridimensional para la cúpula invertida, nunca pueden tener tangente vertical en los arranques; el tambor que soporta una cúpula debe estar inclinado hacia el interior y no ser vertical. El proyecto definitivo de Wren para la cúpula de San Pablo tiene una cúpula exterior de madera; las dos interiores son de fábrica y mantienen su inclinación al acercarse al tambor que las soporta.

De la misma manera que los maestros canteros se encargaban del proyecto y la construcción de los edificios medievales de piedra, el proyecto de las techumbres de madera era cosa de los carpinteros. En los manuales medievales de construcción —por ejemplo el de Villard de Honnecourt— se consideró necesario incluir el proyecto de techumbres; los «secretos» del oficio consistían en una adecuada triangulación de los elementos y en que éstos trabajasen siempre, en la medida de lo posible, a compresión. Se trata de principios sensatos que no parecen muy difíciles de cumplir en una iglesia pequeña en la que los gruesos muros de fábrica pueden resistir el empuje de las armaduras arqueadas de madera. El proyecto de la armadura para el teatro Sheldonian suponía un problema debido a su gran luz, superior a 20 m. Wren adoptó un entramado triangulado plano que no producía ningún empuje sobre sus apoyos. Para ello, tuvo que idear unos elementos trabajando a tracción de 20 m de luz que debían construirse con maderos mucho más cortos. Empleó uniones en rayo de Júpiter, muy parecidas a las que aparecen en la primera edición ilustrada de Alberti publicada (en italiano) en 1550. (La primera edición inglesa de los Diez libros de arquitectura no se publicó hasta 1726, pero Wren tenía una edición en latín de 1512.)

Otra idea tomada de Alberti es el empleo de arcos invertidos enterrados para conseguir un reparto de cargas más regular en las cimentaciones continuas. Hooke empleó esta idea de Alberti en 1675 en el proyecto de la Montagu House, y Wren la utilizó en su Biblioteca para el Trinity College de Cambridge.

Envoi

La autoría de alguno de los edificios proyectados por Wren, Hooke, Woodroffe, Hawksmoor y el resto de los empleados de su estudio no está clara, sin mencionar las aportaciones que debieron de hacer los maestros de obras que participaron en la construcción, y el resto de artistas encargados de la decoración. No hay duda de que Hooke fue quien tuvo la idea de investigar las formas correctas de arcos y cúpulas y no hay constancia de discusión alguna sobre ello; asimismo existen ejemplos en los que uno de los socios es el autor de la mayor parte de uno de los proyectos.

Una de las ventajas de un estudio de varios asociados está en que las cuestiones pueden comentarse entre todos los socios; en el momento en que se decide una solución, es difícil decir a cuál de los participantes corresponde. Así, en las reuniones semanales de la recientemente fundada Royal Society, se debatió a menudo el problema de la gravitación universal, y la ley del inverso del cuadrado fue discutida por varios miembros durante varios años. Sin duda, Hooke había publicado que la ley era ciertamente correcta, pero como sucedió con su conoide parabólico-cúbico, sin demostración; no obstante se sintió profundamente ofendido cuando Newton publicó años mas tarde sus *Principia* sin ningún reconocimiento hacia él. Es un hecho que Newton había demostrado ya, pero para él mismo y antes de la publicación de Hooke, que le ley del inverso del cuadrado explicaba el movimiento de los planetas —y lo que es más importante, Newton fue capaz de dar la demostración matemática, algo completamente fuera del alcance de Hooke y de los demás miembros de la Royal Society. Newton había encontrado (por usar su propia metáfora) algunos «smooth pebbles and pretty shells», guijarros suaves y conchas bonitas, y las había juntado para formar una estructura intelectual formidable —para él era irrelevante si otros habían manejado esos guijarros antes.

14

La Historia de la Teoría de Estructuras

Poco antes de su muerte Newton escribía: «No sé cómo me considerará el mundo, pero a mí me parece que sólo he sido como un niño que juega en la orilla del mar, entretenido con el descubrimiento de una piedra más lisa o de una concha más bonita que las demás, mientras el océano de la verdad se extendía inexplorado ante mí».

En primer lugar, Newton destaca la alegría del descubrimiento, de encontrar algo que otros no han visto antes. Para Newton bien podría tratarse de un juego secreto, algo que se reservaba para sí: de hecho, parece ser que apenas experimentó la necesidad humana de mostrar a los demás las perlas de sabiduría que había encontrado en la playa. La recompensa para los científicos consiste en saber que han hecho avanzar el conocimiento de su disciplina, tanto si es de forma significativa como superficial, y no sienten el impulso que lleva a compartir este conocimiento con otros. En realidad, en los siglos XVII y XVIII (e incluso en la actualidad), hubo ocasiones en las que se dieron buenas razones para no revelar demasiado pronto los avances conseguidos. Cuando James Bernoulli en 1694 acertó con su principal «descubrimiento» —es decir, un postulado, una hipótesis— de que la curvatura de la elástica en cualquier punto de una viga inicialmente recta y de sección uniforme debería ser proporcional al momento flector en ese punto, sabía que había encontrado una perla de gran valor. Sin embargo, no reveló de inmediato su descubrimiento por temor al plagio: deseaba establecer una teoría más firme antes de mostrar a los demás su nueva y preciosa piedra.

En segundo lugar, en las expresiones «la orilla del mar» y «el gran océano de la verdad» está implícito que todo el conocimiento es algo que ya existe y que la labor del científico consiste en recoger algunas perlas y exponerlas a la luz. Es cierto que algunos avances se han logrado de forma accidental, cuando un científico encuentra una concha más hermosa de lo habitual y al examinarla descubre que se trata de un hallazgo de cierta importancia. Pero en la mayoría de los casos, y en concreto en el de Newton, el científico ya está en posesión de unas cuantas perlas y vislumbra la idea de hacer con ellas un bello collar. El hilo con que se han de engarzar estas perlas se concibe con una cierta forma (que por supuesto puede cambiar a medida que el trabajo avanza), y se han de buscar otras perlas que encajen con las ya descubiertas, para así lograr el gran proyecto final.

De esta manera, cuando rastrea la playa junto al gran océano de la verdad, el científico está buscando, más o menos conscientemente, perlas de forma y tamaño determinados. Puede ocurrir que no consiga encontrarlas, por lo que se verá forzado a inventar una nueva perla para enhebrar el collar, y así habrá realizado un descubrimiento totalmente nuevo. Por supuesto, al rastrear la playa, o al hilo de una nueva invención, puede suceder que se descubra algo totalmente ajeno

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The History of the Theory of Structures». En: *Essays in the history of the theory of structures, in honour of Jacques Heyman,* ed. por S. Huerta. (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 2005): 1–8. Traducción de Ignacio Gil Crespo.

a la búsqueda. Sin embargo, es probable que, una vez definida e iniciada una exploración determinada, incluso perlas de gran valor sean desechadas si no parecen importantes para el objetivo final. La mayoría de los avances científicos se han realizado de esta manera: se propone una hipótesis y se construye una teoría, y solo se recogen los datos que soportan esa teoría. No hay nada fraudulento en este proceder: si se encontrasen datos que refutasen la teoría, serían bien recibidos por el verdadero científico ya que se habría realizado un avance real. Como es evidente, nunca se puede demostrar que algo sea verdad, pero basta una observación para demostrar que algo es falso. No se trata de que el científico oculte los datos «negativos», sino que, sencillamente, en el proceso de búsqueda existe una predisposición a encontrar *sólo* las perlas que puedan encajar bien en el collar. Sería completamente perverso que los científicos empleasen su tiempo en buscar lo que contradice las teorías que desean establecer.

* * *

Los historiadores, como los científicos, experimentan la satisfacción del descubrimiento. No obstante, su campo ya no es ese océano casi infinito de la verdad explorado por los científicos, sino el registro, más limitado, aunque todavía vasto, de la experiencia humana. El historiador busca dotar de orden y significado a la serie de acontecimientos registrados por sus contemporáneos, o que otros académicos han interpretado, y asignar un patrón a los acontecimientos futuros. Los hilos ya existen y tienen que ser desenredados y tejidos en un conjunto coherente. La historia de la Gran Guerra de 1914–18, por ejemplo, se debe basar en los acontecimientos conocidos y se debe interpretar a la luz de las intenciones de los participantes: la creación y ruptura de alianzas, las políticas de los diversos poderes involucrados, la estabilidad económica de cada país, además de las actitudes de los personajes implicados en la lucha. Los hilos son numerosos y pueden ser muy largos: al analizar la Primera Guerra Mundial puede ser relevante buscar referencias en el conflicto entre Atenas y Esparta en el 431 a.C. y analizar, de manera más general, los conflictos que han ido surgiendo entre las naciones a lo largo de la historia.

Los historiadores, como los científicos, seleccionarán, de forma consciente o no, pruebas que respalden el patrón con el que han estructurado su trabajo. Ambos tienen en su mente la forma concreta del collar para el que están recogiendo las perlas. Ambos pueden verse influidos por los trabajos de otros académicos, por el conocimiento que ya está a su disposición e incluso por la estética de sus investigaciones, pero el científico no está sujeto a la importante restricción impuesta al historiador. El historiador no puede inventar nuevas perlas, sino que debe trabajar con aquellas que ya se encuentran depositadas a la orilla del mar. El historiador sabe qué países aliados obtuvieron la victoria en la guerra de 1914–18 (aunque se podría discutir si esa victoria fue total, a la luz de la posterior historia del siglo XX), y cualquier narración sobre la Gran Guerra debe concluir con el resultado de la conocida victoria de 1918. Las pruebas del historiador se imponen por su importante conexión con este resultado final y, al igual que le ocurre al científico, los indicios que contradigan su explicación pueden pasar desapercibidos de forma involuntaria. Estamos ante un ejemplo elemental de la interpretación «Whig» de la historia, en la que las pruebas aportadas conducen inevitablemente al resultado conocido.

* * *

El historiador de la ciencia es un historiador Whig en toda regla. Cuando rastrea el desarrollo de una teoría científica particular, cualquier evidencia se interpreta como algo que ha contribuido al progreso del pensamiento humano, desde la oscuridad primigenia hasta el actual estado de iluminación. Los descubrimientos que no han resultado relevantes para este progreso se consideran incursiones en callejones sin salida. Así, los historiadores de la teoría de estructuras saben que existen potentes programas informáticos capaces de establecer el estado de un amplio rango de estructuras. Además, saben que esos programas de ordenador utilizan, de una u otra manera, los tres tipos de afirmaciones que deben plantearse para cualquier estructura: tiene que haber equilibrio, estático o dinámico, de forma que se puedan plantear las ecuaciones que relacionan las fuerzas externas e internas; consideraciones geométricas relacionan las deformaciones internas de la estructura con ciertas condiciones de contorno ante el desplazamiento; y, por último, propiedades conocidas del material relacionan las fuerzas internas con las deformaciones internas. En su búsqueda a la orilla del océano de la verdad estructural, el historiador deberá reunir las pruebas que contribuyan al desarrollo y la

comprensión de estas tres afirmaciones fundamentales de la teoría de estructuras.

La búsqueda del historiador se ve reducida, de hecho, por este enfoque «Whig». El objetivo del análisis de estructuras es aportar una base para el proyecto de la estructura, y grandes edificios han permanecido en pie durante milenios. Los templos griegos y romanos se «calcularon», al igual que se calcularon las grandes iglesias bizantinas y las catedrales románicas y góticas, pero no con los métodos actuales. La búsqueda de evidencias históricas que permitan comprender la actual teoría de estructuras contribuirá muy poco a la comprensión de la práctica antigua. Las reglas de proyecto antiguas se dirigían —acertadamente— a conseguir la forma apropiada de una estructura y sus elementos. El historiador considerará que tales reglas numéricas de proporción no son relevantes hoy en día. (De hecho, algunas de las aportaciones más importantes a las matemáticas, que pueden considerarse como incursiones en callejones sin salida, como el desarrollo de los números irracionales, no serán reconocidas como una aportación surgida en el campo de la tecnología de la construcción.)

El moderno historiador de las estructuras comenzará probablemente con el problema de Galileo (1638) sobre la rotura de una viga en voladizo, que parece implicar el análisis de las tensiones de una viga de sección rectangular sometida a flexión. Pero esto sería considerar el tema con una perspectiva actual —Timoshenko, por ejemplo, «conoce» la solución «correcta» de Coulomb de 1773 y afirma que Galileo comete un error con un factor de 3. Sin embargo, Galileo no estaba tratando de calcular las tensiones sino de valorar la carga de rotura y calculó correctamente las proporciones entre las resistencias de rotura de diferentes tamaños de vigas rectangulares. De igual manera, aunque Coulomb esboza lo que para ojos modernos parece ser una distribución elástica de tensiones, en realidad, se trata de una suposición de la distribución de rotura. No obstante, la solución elástica ortodoxa se atribuye a Coulomb/Navier, aunque fue de hecho Navier quien cristalizó formalmente las ideas elásticas en 1826. Estos estudios se clasifican erróneamente si se considera que guardan relación con la teoría del análisis de estructuras; en realidad son análisis de las tensiones locales y forman parte de la disciplina de la resistencia de materiales. Galileo, al igual que Coulomb, estudió una viga en voladizo estáticamente determinada, donde el fallo local supone el fallo de toda la estructura; la teoría de estructuras se ocupa, sin embargo, del problema básico de la indeterminación estática.

* * *

La existencia de estructuras estáticamente indeterminadas, o hiperestáticas, es algo que se conoce desde hace unos trescientos años. A lo largo del siglo XVIII se realizaron varios intentos para calcular la resistencia de este tipo de estructuras sin que se produjese un gran avance. Se advirtió que las ecuaciones de la estática aportaban una información insuficiente, aunque, por ejemplo, se podía analizar la viga continua en algunos casos particulares. Se carecía de una teoría general. Fue el genio de Navier el que le permitió seleccionar, de entre todas las piedras a la orilla del mar, aquellas que permitían resolver el problema. Una vez formulada la solución, resultó tan convincente, que las pruebas posteriores de su falsedad fueron ignoradas en gran medida.

Navier, en 1826, era heredero de la teoría de Bernoulli/Euler sobre la flexión elástica. Añadió las ecuaciones de flexión a las de la estática (dos de las tres afirmaciones fundamentales) para calcular el estado real completo de una viga hiperestática. Una vez que se conocía ese estado, se podía emplear la ciencia de la resistencia de materiales para determinar los valores de las tensiones en cualquier punto de la viga. La teoría elástica fue de suma importancia; constituyó el hilo en el cual se pudieron enhebrar todas las perlas. Las ecuaciones elásticas determinaban el estado general de la estructura; el análisis elástico calculaba los valores máximos de las tensiones internas, y a estos valores se les imponían ciertos límites (determinados experimentalmente), como son los de rotura o de deformación admisible.

El método de Navier implica el uso de la tercera afirmación fundamental de la teoría de estructuras: las condiciones de contorno describen cómo se conecta la estructura con el medio en el que se encuentra. Tendrían que transcurrir casi cien años para que se cuestionaran las condiciones de contorno. Kacinczy en 1914 trató de determinar experimentalmente el grado de empotramiento necesario en los extremos de una viga supuestamente biempotrada, no para atacar la teoría de Navier, sino para permitir el cálculo práctico de los extremos empotrados. El resultado experimental de que el grado de empotramiento de los extremos no era realmente relevante, desencadenó

todo el desarrollo del cálculo plástico, en oposición al elástico. Sin embargo, era tal el poder y la belleza de la teoría de Navier, que no se tuvo en cuenta la (correcta) conclusión de que la teoría elástica no describía el comportamiento real de una estructura hiperestática. De hecho, veinte años más tarde, cuando Kacinczy era plenamente consciente de las formulaciones plásticas, seguía todavía hipnotizado por Navier llegando a sugerir que se podía llegar al análisis plástico modificando una solución elástica preliminar.

Medio siglo antes, una fijación similar sobre la exactitud de los conceptos elásticos se aprecia en la obra de Castigliano. Sus principios de la energía permitían la determinación de los esfuerzos internos de una estructura hiperestática, y mostró cómo calcular las grandes variaciones de la tensión interna producidas por imperfecciones muy pequeñas resultantes de la fabricación y la construcción. Sin embargo, no señaló en ningún sitio que *todas* las estructuras serían inevitablemente imperfectas y, además, con un tipo de imperfección desconocido, por lo que los resultados de un análisis elástico típico no se podrían observar nunca. No fue sino hasta el decenio de 1930 cuando, al realizar unos ensayos en Londres sobre los grandes pórticos metálicos de unos edificios en construcción, se mostró de manera concluyente que el estado de tensiones calculado al aplicar la teoría elástica se alejaba considerablemente del comprobado con mediciones. Incluso entonces, los investigadores intentaron modificar los métodos de cálculo elásticos para considerar el comportamiento «real» de las uniones entre elementos, para finalmente abandonar más de un siglo de penosos trabajos en favor de las ideas plásticas.

Los métodos de cálculo elástico se habían desarrollado con una gran agudeza. Las ecuaciones se podían escribir fácilmente, pero eran muy numerosas y, antes del desarrollo de los ordenadores, difíciles de resolver. Por el contrario, las ecuaciones de la teoría plástica eran más sencillas, ya que las condiciones de contorno (desconocidas e incognoscibles) o, por ejemplo, la flexibilidad de los nudos, no entraban a formar parte del análisis. Durante un tiempo, tras la Segunda Guerra Mundial, la nueva teoría avanzó de manera constante, pero el progreso se detuvo por el creciente uso de los rápidos ordenadores. Las numerosas y complejas ecuaciones elásticas del siglo XIX se podían resolver ahora con gran precisión, y de esta forma el collar elástico de Navier pudo resplandecer con un brillo incuestionable.

Una vez más, el poder de los métodos elásticos deslumbró a los proyectistas de estructuras, que continuaron suponiendo que sus cálculos se referían a los estados existentes observables en las construcciones reales. Un solo contraejemplo debería haber sido suficiente para que los métodos de cálculo se modificasen o incluso se abandonasen y, de hecho, al final del siglo XX se disponía de innumerables ejemplos de observaciones prácticas que contradecían la teoría. Quizá se pueda disculpar a quien desarrollando una teoría ignore inconscientemente aquellas perlas que no encajan, ni por su utilidad ni por su estética, en el collar que está elaborando; pero es menos perdonable que, una vez que el collar se ha terminado, se ignoren las evidentes y desagradables anomalías.

* * *

El historiador del análisis estructural, partiendo del actual enfoque Whig, que cree conocer las principales características de un cálculo estructural correcto, puede rastrear el origen de los hilos y encontrar donde se pudieron encontrar errores. Las evidencias apuntan inexorablemente a Navier y al año 1826, cuando publicó las lecciones que impartía en la École des Ponts et Chaussées. El avance de Navier fue muy importante, quizá no tanto como el de Newton cuando estableció la teoría de la gravitación universal, pero sí del mismo tipo: resolvió mediante un golpe de genio un problema planteado y sin solución aparente, partiendo de una profunda reflexión y una total comprensión académica del tema. Una diferencia entre las teorías de Newton y Navier es que la teoría de Newton fue sometida a prueba continuamente, y no tanto para refutarla, sino como ayuda para desarrollar nuevos avances. Y cada avance ha ido confirmando lo acertado del pensamiento de Newton; al menos durante más de dos siglos, hasta que las pequeñas anomalías críticas se pudieron explicar en base a la nueva y mejorada teoría de Einstein.

La teoría de Navier no se contrastó de esta manera durante más de un siglo, es decir, no se buscó una confirmación experimental. Por el contrario, se desarrolló el método abriendo la posibilidad del análisis y proyecto de estructuras cada vez más complejas y con la introducción de matemáticas elaboradas y de maneras elegantes de calcular soluciones aproxima-

das. Es cierto que al principio —incluso antes que Navier— se hicieron intentos de ensayar estructuras reales, pero la tarea era difícil y complicada. Si los resultados diferían de la predicción teórica, la conclusión más habitual era que la técnica experimental presentaba algún defecto, en lugar de admitir que la teoría era errónea. Mirando atrás, parece que se produjo, casi de forma deliberada, una total falta de interés para aceptar cualquier evidencia que desacreditase la gigantesca estructura intelectual de Navier.

Quizá sea más correcto decir que no había ningún interés en desautorizar a Navier, quien había suministrado al ingeniero una teoría que funcionaba, en el sentido de que le permitía proyectar estructuras. Puede que la teoría no describa cómo es el comportamiento real, pero permite proyectar la estructura de un edificio para que soporte unas cargas determinadas. Por otra parte, aunque el método resulta irracional, es seguro: las fuerzas internas reales no son las que se calculan con la teoría elástica, pero son unas fuerzas con las que la estructura trabaja con comodidad y que no causarán su colapso. Esta cualidad de seguridad solo se pudo probar un siglo y medio después de Navier y, paradójicamente, a través de la aplicación de los teoremas plásticos a los procesos elásticos. Pero incluso antes de esta evidencia los proyectistas elásticos sabían, por lo menos por su experiencia, que su actividad era segura. No tenían ningún motivo para desautorizar el método que estaban siguiendo y que consideraban acertado.

Lo que aquí se ha expuesto es la diferencia fundamental entre las actividades del científico «puro» y del que se ocupa de la ciencia aplicada, es decir, el ingeniero. El ingeniero desarrolla una teoría científica hasta donde resulta útil, hasta el punto en que se puede hacer algo con ella: en el caso de un ingeniero de estructuras, proyectar un edificio. Una vez alcanzado este punto, no existe la necesidad imperiosa de cuestionar la validez, la «verdad», del algoritmo de cálculo que se está utilizando. La «Normativa» que reúne las reglas queda congelada y su aplicación sucesiva en proyectos satisfactorios no hace sino confirmar su exactitud. Sólo cuando la Norma se aplica a una estructura que aparenta ser normal pero que, de hecho, es ligeramente inusual, es cuando puede ocurrir una catástrofe. Tal desastre debería ser el contraejemplo, suficiente para invalidar la teoría completa; pero frecuentemente lo que se hará, en vez de desafiar el marco intelectual existente, será modificar ligeramente algunas reglas de la Norma. En realidad, se puede disculpar esta adaptación ante evidencias indeseadas: los ingenieros de estructuras se encuentran muy a gusto con la mecánica de Newton y no necesitan el conocimiento de Einstein para proyectar sus estructuras. No obstante, el deber del ingeniero académico consiste en no ignorar las anomalías incómodas, sino en probar y construir una teoría nueva y mejor.

Por supuesto, esta nueva teoría mantendrá gran parte del conocimiento acumulado en el pasado. En el caso del proyecto de estructuras, no se puede evitar la presencia de las tres ecuaciones fundamentales, pero lo que es importante será la forma de considerar y utilizar estas ecuaciones. Los ingenieros que desarrollan una nueva teoría deben aplicar continuamente sus resultados a casos inusuales; deben buscar concienzudamente los contraejemplos que puedan conducir a una revisión radical de toda la construcción intelectual.

* * *

La pregunta que surge ahora es cuánta historia de la teoría de estructuras se debería enseñar en las escuelas técnicas. En realidad la pregunta sería, no ya cuánta historia de la teoría, sino cuánta teoría se debería impartir. Parece evidente que la mayoría de los ingenieros de estructuras, con un entendimiento básico aunque rudimentario de su disciplina y con un buen conocimiento de las normas de construcción, pueden llevar a cabo proyectos completamente satisfactorios. Las universidades, por su propia naturaleza, se centran en la enseñanza de la teoría académica, ilustrada, por supuesto, con experiencia práctica, pero con un nivel que demuestra ser de poca utilidad para el ingeniero graduado. Y, aunque el tema pueda despertar el interés momentáneo en un estudiante inquieto, la historia de la ingeniería será incluso de menor utilidad. Para el futuro ingeniero tiene poco sentido dominar la historia del desarrollo de la teoría de estructuras a lo largo de tres siglos, si bien (por ejemplo) la brillantez de la solución de Euler para el problema de la elástica animará la exposición de la teoría del pandeo. Está bien que se permita brillar a algunas de estas perlas, pero al ingeniero práctico, en realidad, no le interesa de donde provienen las fórmulas de la normativa: lo que le importa es que esas fórmulas funcionan y le permiten proyectar.

Es en el momento en que estas fórmulas no funcionan cuando el historiador de la ingeniería tiene

algo que aportar. Se han producido desastres cuando se han aplicado las normas a estructuras para las que no estaban previstas; algunos ejemplos son el colapso de edificios prefabricados de gran altura y de los puentes de viga-cajón de acero. Con un conocimiento del desarrollo de la teoría y de la manera en que se formularon las normas, el historiador puede llegar a determinar cuándo y dónde se cometieron los errores. Este debería ser el objetivo del historiador: no exponer el indudable tamaño y belleza de las perlas sino, por el contrario, descubrir que una de esas perlas es falsa, un engaño que pretende formar parte del esquema perfecto, y que, en cambio, está causando la rotura del collar. El historiador de la ciencia es, en este sentido, un anti-científico; el científico busca avanzar encontrando nuevas perlas, mientras que el objetivo del historiador se centra en destruir.

De alguna manera se debe conseguir que los estudiantes sean conscientes de que las reglas que emplean para proyectar pueden contener (literalmente) un defecto fatal. Puede suceder que a lo largo de sus vidas profesionales los ingenieros de estructuras nunca lleguen a proyectar un edificio inseguro; pero sí deberán estar alerta cuando apliquen las normas a una estructura ligeramente fuera de lo normal. El estudiante debe ser consciente de que habrá ocasiones en las que las reglas, aparentemente perfectas e inamovibles, que emplea para proyectar deberán ser cuestionadas. Este tipo de convicción puede crearse a través del conocimiento de los errores del pasado, y por esta razón, el análisis de las catástrofes puede ser una de las partes más fructíferas de la enseñanza de la historia de la ingeniería de estructuras.

15
Análisis teórico y cálculo en el mundo real

La tesis

La respuesta de una estructura hiperestática ante un cierto sistema de cargas depende de la naturaleza y la magnitud de esas cargas, así como de la manera en que la estructura está vinculada a su entorno. Ambos factores pueden tener consecuencias comparables en la estructura pero, mientras que las cargas se pueden definir con precisión, las condiciones de contorno son, en general, desconocidas. Por lo tanto, no se puede conocer el camino real que siguen las cargas en la estructura, y sin embargo el ingeniero debe proporcionar un proyecto práctico y seguro.

Introducción

Cuando se diseña una estructura se precisa cierta información para que pueda proyectarse de acuerdo con unos criterios aceptados, siendo los tres más importantes la resistencia, la rigidez y la estabilidad; la estructura debe ser los suficientemente resistente para soportar la acción de las cargas, no debe deformarse excesivamente, y no debe ser inestable, ni local ni globalmente.

La Teoría de Estructuras se ocupa de determinar el estado de una estructura. En concreto, las resultantes de tensiones internas (fuerzas en barras, empujes, cortantes, momentos flectores) estarán en equilibrio con las cargas externas. Estas resultantes de tensiones internas producen deformaciones internas, que se pueden calcular a partir de las propiedades del material; se trata de un problema de análisis tensional o Resistencia de Materiales, que se ocupa del comportamiento local, más que del global. Las deformaciones internas conducen a desplazamientos generales en la estructura, y estos desplazamientos deben ser compatibles con las condiciones de contorno. Así, en una estructura se pueden hacer tres tipos diferentes de afirmaciones —equilibrio, propiedades del material, y compatibilidad de deformaciones. Si con la primera, las ecuaciones de la estática, basta para determinar el estado de la estructura, entonces está estáticamente determinada, es isostática. La Teoría de Estructuras estudia las estructuras hiperestáticas, en las que las ecuaciones de la estática no proporcionan una solución única, y es necesario utilizar las tres afirmaciones para estudiar un problema en particular.

En la figura 15.1 se muestra una viga simple de sección uniforme con un grado de indeterminación; este fue, de hecho, el ejemplo elegido por Navier en 1826 para mostrar su método de trabajo con este tipo de estructuras. Cualquier estudiante de primer año de teoría de estructuras es capaz de encontrar la solución elástica de este problema; durante los dos últimos

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Theoretical analysis and real-world design,» *Structural Engineer* 83 (2005): 14–17. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo y Paula Fuentes González.

siglos se han desarrollado varios métodos de cálculo que conducen al siguiente resultado:

$$P = \frac{5}{16}W; \; M = \frac{3}{16}Wl; \; M_c = \frac{5}{32}Wl$$

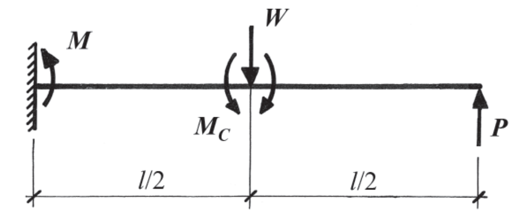


Figura 15.1
Estructura hiperestática sencilla

El momento flector M en el arranque del voladizo apoyado en su extremo es el mayor del vano, y es en este valor en el que se basaría un cálculo elástico convencional. Como ejemplo numérico, si la luz l es de 8 m y la carga W es de 200 kN (que son unos valores razonables), entonces, en un proyecto con acero se podría utilizar un 533 × 210 UB 92; esta sección tiene un momento de inercia de 553,5 × 10^6 mm^4. Alternativamente, el proyecto se podría realizar en hormigón armado, en cuyo caso la sección de la viga ya no sería uniforme. Además, las propiedades elásticas del hormigón armado no se conocen con tanta precisión como las del acero, y no se puede asignar un valor concluyente al momento flector de proyecto.

Dejando de lado estas incertidumbres, hay una consideración mucho más importante. Los soportes del voladizo apoyado no son, en la realidad, completamente rígidos —por ejemplo, el empotramiento en el arranque no será perfecto, y se podrán producir pequeños giros. En el extremo libre, el apoyo supuestamente fijo, puede descender un cierto valor d; si esto sucede, el estado elástico modificado de la viga es

$$P = \frac{5}{16}W - 3\frac{EId}{l^3}$$
$$M = \frac{3}{16}Wl + 3\frac{EId}{l^2} \qquad (1)$$

y

$$M_c = \frac{5}{32}Wl - \frac{3}{2}\frac{EId}{l^2}$$

Siguiendo con el ejemplo numérico de la viga de acero, si consideramos un descenso d de 8 mm (0,1% de la luz), y si el valor del módulo de Young es 210.000 N/mm², entonces

$$P = (62{,}5 - 5{,}45) \text{ kN}$$
$$M = (300 + 43{,}6) \text{ kNm} \qquad (2)$$
$$\text{y } M_c = (250 - 21{,}8) \text{ kNm}$$

El valor de la fuerza P en el apoyo se ha reducido cerca de un 9%, y como resultado el valor de M se ha incrementado un 14,5%. Estas importantes variaciones son consecuencia de un «defecto» del 0,1% de la luz; con un descenso d de $l/360$, esto es 22 mm, la variación del momento sería de alrededor del 40%.

Proyecto por resistencia

De las ecuaciones (1) se deduce que un movimiento hacia arriba del apoyo (con relación al extremo empotrado) reducirá el valor del momento flector máximo M, mientras que se incrementará el momento M_c en la mitad del vano. Ambos valores se igualan cuando

$$3\frac{EId}{l^3} = -\frac{1}{48}W \qquad (3)$$

y, con los valores numéricos previos, $d = -6{,}1$ mm. Si se produjera exactamente este desplazamiento relativo entre los dos extremos de la viga, entonces el proyectista elástico encontraría que el máximo momento flector vale

$$M = M_c = \frac{8}{48}Wl$$

en lugar del anterior

$$\frac{9}{48}Wl$$

y se podría elegir una sección menor de las tablas.

Este es, por supuesto, el enfoque del proyecto plástico, en contraste con el elástico. El proyectista trata de reducir los momentos flectores críticos todo lo posible —para una viga o un pórtico con sección uniforme, se igualarían sus valores. Para el voladizo apoyado con un grado hiperestático, se deben igualar dos momentos; para una estructura general que tenga, localmente, un número n de redundancias, se deben igualar $(n + 1)$ momentos.

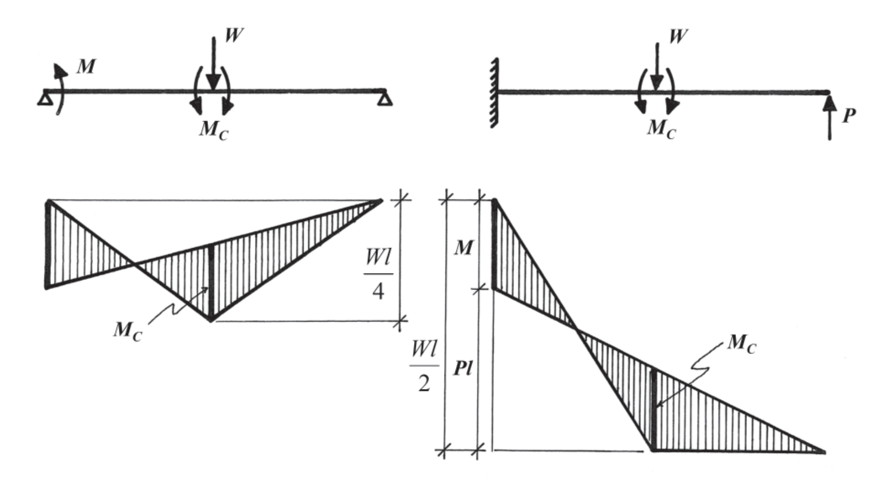


Figura 15.2
Maneras alternativas de dibujar los momentos flectores para la viga de la figura 15.1

Por supuesto no es necesario obtener una solución elástica antes de proceder a un cálculo plástico; para el voladizo apoyado, el desplazamiento d del apoyo se puede considerar como un simple recurso que permite obtener unos valores generales de los momentos flectores. Esto queda claro si sustituimos la expresión $3EId/l^3$ por una cantidad x, a la que no es preciso atribuir ningún significado físico; los momentos en el extremo y el centro de la viga (comparar con la ecuación (1)) son

$$M = \frac{3}{16} Wl + xl \qquad (4)$$

y

$$M_c = \frac{5}{32} Wl - \frac{1}{2} xl$$

La x se puede eliminar de las ecuaciones (4) y se obtiene

$$M + 2M_c = \frac{1}{2} Wl \qquad (5)$$

Esta relación se puede expresar geométricamente de manera sencilla; la figura 15.2 muestra dos formas alternativas para dibujar los diagramas de momentos flectores «libres» y «reactantes», sin referencia a la solución elástica, y de cualquiera de ellas se puede deducir la ecuación (5).

La ecuación (5) se puede escribir también considerando el mecanismo «virtual» de la figura 15.3. Igualando los trabajos internos y externos producidos por un pequeño giro θ del mecanismo se obtiene

$$(M)(\theta) + (M_c)(2\theta) = W\left(\frac{l}{2}\theta\right) \qquad (6)$$

que es precisamente la ecuación (5), y que se ha escrito sin tener en cuenta las propiedades del material o las condiciones de contorno. (En ejemplos más complejos se debe ser cuidadoso con las convenciones de signos.) No es casualidad que los multiplicadores θ y 2θ aparezcan en la ecuación (6); la geometría de los diagramas de momentos flectores está relacionada con la geometría del mecanismo de la figura 15.3.

Por lo tanto, es evidente que, en general, el estado «real» de una viga se determina a partir de dos factores,

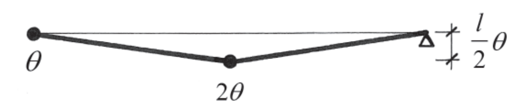


Figura 15.3
Mecanismo «virtual» elemental de la viga de la figura 15.1, que es también un mecanismo de colapso plástico

como se muestra en las ecuaciones (1); el término principal expresa la contribución de la carga externa (W en el ejemplo), pero puede ser modificado por la contribución, que puede ser sustancial, de la interacción de la estructura con el entorno (el desplazamiento d del apoyo supuestamente rígido). El esquema elástico de Navier de 1826 ignora estas imperfecciones, y d se hace cero en las ecuaciones (1) —o lo que es lo mismo, $x = 0$ en las ecuaciones (4)— de manera que el momento flector máximo es

$$M = \frac{3}{16} Wl$$

El proyectista plástico también ignora estas imperfecciones, y minimiza el momento flector máximo, obteniendo, a partir de la ecuación (5), el valor de proyecto

$$M_o = \frac{1}{6} Wl$$

En ambos casos se ha «resuelto» el problema estructural global, y se puede proceder a dimensionar de la misma manera con los principios de la resistencia de materiales —por ejemplo, se puede elegir una sección de manera que no se supere la tensión (elástica) de flexión especificada.

Las dos distribuciones de momentos —elástica y plástica— son ligeramente diferentes. Ninguna de ellas se pueden observar en la práctica. Esta fue una de las principales conclusiones de la Comisión de Investigación de Estructuras de Acero en el decenio de 1930, cuando se llevaron a cabo por primera vez ensayos de carga en edificios reales. Los valores elásticos (de Navier) guardaban poca relación con los valores observados en realidad; es decir, se cumplían las ecuaciones de equilibrio, tales como

$$M + 2M_c = \frac{1}{2} Wl$$

pero los valores locales presentaban grandes diferencias con respecto a los calculados. La razón se detectó de inmediato; imperfecciones reales que no se habían considerado en los cálculos tenían una gran influencia sobre el estado de la estructura. (En las ecuaciones (1), la influencia del desplazamiento d era importante.) Estas influencias de las condiciones de contorno (el descenso del apoyo, o un vínculo imperfecto en el empotramiento supuestamente rígido) son desconocidas para el proyectista; de hecho, son esencialmente incognoscibles.

Una estructuras recibe la acción de ciertas cargas dadas (y su equilibrio interno debe reflejar estas cargas), pero su estado «real» está, de hecho, determinado por pequeños asientos, empotramientos imperfectos, pequeños errores de montaje, etc. La palabra «real» se coloca entre comillas porque, a lo largo de su vida, tanto las imperfecciones internas como las externas pueden cambiar. Un descenso del nivel freático puede causar un pequeño asiento de la cimentación; un deslizamiento en una unión puede aliviar tensiones locales altas; un vendaval puede provocar una sacudida en la estructura que conduzca a un estado completamente diferente, pero estable. En realidad, sólo hay un estado aquí y ahora. Sin embargo, al proyectista se le pide que proporcione una estructura segura, y este es el objetivo principal: realizar el proyecto cuando el estado real de la estructura es, de hecho, desconocido.

Se puede utilizar un segundo ejemplo, no tan artificial como podría parecer, para mostrar las posibilidades que se abren ante el proyectista actual de edificios de acero o de hormigón. La figura 15.4 muestra un arco de fábrica sencillo; la teoría de fábricas está en la actualidad bien desarrollada, y sólo es necesario mencionar los aspectos más importantes. Las dovelas del arco se asientan bien con un mortero débil, o bien sin mortero, por lo que los bloques se pueden separar fácilmente; la cohesión estructural se mantiene por la compresión entre las dovelas, y se supone que no se produce deslizamiento en las juntas. Las tensiones de compresión son muy bajas, de manera que el material en sí puede suponerse infinitamente resistente. (Todos estos, y otros supuestos pueden ser cuestionados por el proyectista, y se pueden hacer modificaciones en los cálculos si es necesario. Sin embargo, el enfoque simplificado conduce a una visión esencialmente correcta del comportamiento del arco.)

Para unas cargas dadas que actúan sobre el arco se generarán fuerzas internas de compresión que pasan a través de unos ciertos puntos en las juntas entre dovelas; la línea que une estos puntos a lo largo del arco se puede llamar, con cierta imprecisión, línea de empujes. En términos convencionales, un arco perfectamente ajustado entre estribos rígidos, es hiperestático de grado tres, por lo que las ecuaciones de equilibrio no determinan la posición de la línea de empujes; lo que es seguro es que, puesto que no se puede producir

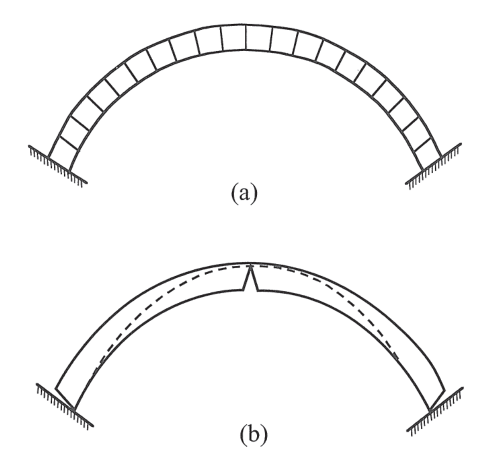


Figura 15.4
Arco simple de dovelas y el agrietamiento resultante de un pequeño incremento de la luz. Las grietas fijan la posición de la línea de empujes (línea de puntos)

tracción entre las dovelas, la línea de empujes debe estar contenida dentro del espesor del arco. Debido a las bajas tensiones, las deformaciones internas son muy pequeñas, pero un programa de ordenador elástico (u otro tipo de análisis) localizará una línea de empujes que, por ejemplo, conduzca a la mínima energía de deformación. (Las dovelas de piedra son de hecho prácticamente rígidas, pero una suposición razonable de rigidez completa no permitirá realizar un análisis elástico: es necesario asignar un valor al módulo de elasticidad.)

En cualquier caso, tanto si el material es completamente rígido como si no, una ligera apertura de los estribos del arco convertirá la estructura hiperestática en una estáticamente determinada. Una apertura de 10 mm en un arco de 10 m de luz (de nuevo un defecto del 0,1%) conducirá a la estructura al estado mostrado, muy exageradamente, en la figura 15.4 (b). Se formarán dos rótulas (visibles en realidad como grietas) en los estribos o cerca de ellos, y una rótula central, que transforman la estructura hiperestática en un arco triarticulado. La posición exacta de la rótula central dependerá ligeramente de la carga aplicada (gravitatoria); si esta carga es simétrica con respecto al centro de la luz del arco, la rótula se formará exactamente en la mitad (en algunas circunstancias, la rótula puede dividirse en dos), y si no, en una junta cercana. En este caso, los movimientos de los estribos han determinado un estado físicamente único para la estructura (y este estado —el arco triarticulado— es casi independiente de cualquier sistema de cargas razonable). Los cálculos se pueden hacer ahora para este determinado estado de equilibrio; por ejemplo, para unas cargas dadas, el valor del empuje en los estribos se puede hallar, y por consiguiente, se pueden calcular los estribos, (este fue el problema analítico esencial en el proyecto de arcos del siglo XVII al XIX).

Si los estribos del arco no se separan, o se separan sólo ligeramente y las dovelas son casi pero no absolutamente rígidas, entonces las juntas entre dovelas se mantienen cerradas, y no se producirán rótulas que ayuden a localizar la posición de la línea de empujes. Todo lo que el calculista puede demostrar es que la línea de empujes ocupa alguna posición como la mostrada en la figura 15.5, situada completamente dentro de la fábrica. De hecho, esto es todo lo que tiene que demostrar. Si es posible encontrar alguna posición como la indicada en la figura 15.5, queda demostrado, por el «teorema de la seguridad» de la teoría plástica, que la estructura es segura. Si el calculista puede encontrar una manera en la que la estructura puede soportar las cargas dadas, entonces, ciertamente, la estructura también podrá encontrar una manera.

Esta afirmación antropomórfica no da, por sí misma, ninguna indicación de qué grado de seguridad tiene la estructura. Dado que se ha supuesto que la fábrica es un material con resistencia a compresión infinita, no es posible un fallo del material. En su lugar, se puede establecer un criterio geométrico. El perfil del arco mostrado en la figura 15.5 no es el mismo que el de la línea de empujes; la directriz del arco puede ser circular, por ejemplo, mientras que, si la carga se distribuye uniformemente, la línea de empujes estaría representada por una catenaria (una cadena que cuelga invertida, como afirmó Robert Hooke en 1675). Si imaginamos el arco real, digamos de espesor

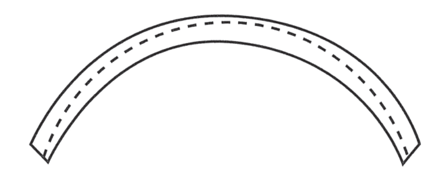


Figura 15.5
Línea de empujes segura en un arco de dovelas

uniforme, reducido progresivamente hacia su directriz, llegaría un determinado momento en que su espesor podría, geométricamente, contener justo la línea de empujes. La relación entre el espesor real del arco y este espesor mínimo imaginado daría un «factor geométrico de seguridad» (en la práctica, un factor de 2 parece apropiado para permitir irregularidades de la construcción y los movimientos impuestos por el entorno, factores ambos que contribuyen a distorsionar la geometría proyectada original).

Estas ideas se pueden aplicar al sencillo ejemplo del voladizo apoyado. Un cálculo plástico con

$$M = M_c = \frac{1}{6} Wl$$

figura 15.2, representa sin duda un estado de equilibrio para la viga; si se le asigna una sección con este valor del momento plástico, la viga sería justo viable, y estaría, de hecho, a punto del colapso real (no virtual) mediante el mecanismo de la figura 15.3. Sin embargo, no es necesario pensar en la teoría plástica como un «método de colapso» de proyecto, sino más bien como un método de equilibrio para unos ciertos valores de servicio de las cargas —si el proyectista asigna una sección que tiene (por ejemplo) un momento plástico completo de 1,75 veces el valor mínimo posible ($M = M_c$), entonces los teoremas plásticos afirman que la estructura es segura con un factor de carga de 1,75.

Proyecto por rigidez

En muchos casos el proyecto por resistencia puede ser el criterio principal. Sin embargo, el proyectista a menudo desea calcular las deformaciones, y puede haber muchas razones para ello. Por ejemplo, unos desplazamientos excesivos en un pórtico de un edificio podrían causar daños a los acabados decorativos; o podría ser necesario un pórtico para colgar la catenaria de una locomotora eléctrica dentro de una cierta tolerancia. Un enfoque plástico no dará ninguna información sobre los desplazamientos, y el proyectista está virtualmente obligado a depender de un análisis elástico, probablemente realizado por un programa de ordenador. (Cabe señalar que si se hace un análisis elástico, los resultados pueden ser utilizados también para realizar un proyecto plástico; el análisis elástico generará los términos de carga de las ecuaciones (4), y un programa sencillo ajustará el valor de «*x*» —para una estructura compleja, habrá varios parámetros que ajustar— de manera que los momentos más grandes alcancen sus valores mínimos.)

Ante la ausencia de información sobre las imperfecciones, un análisis elástico debe proceder suponiendo que la estructura es perfecta. Así, la expresión completa de la flecha en la mitad del vano del voladizo apoyado debido a una carga puntual, figura 15.1, es

$$d_c = \frac{7}{768}\frac{Wl^3}{EI} + \frac{5}{16} d \qquad (7)$$

aunque los cálculos elásticos convencionales darán solamente el primer término de esta expresión. Con los valores numéricos usados previamente y $d = 8$ mm, el valor de d_c es (8,03 + 2,5) mm, y la estimación de 8,03 mm del análisis perfecto es una aproximación aceptable a los 10,53 mm que pueden producirse en la realidad. (Sin embargo, paradójicamente, este valor de 10,53 mm no se puede observar en la realidad . La flecha en el centro del vano se mide en relación a sus extremos, y para $d = 8$ mm, el valor de d_c se reduciría en 4 mm hasta 6,53, menor que el valor «perfecto».)

En general, las deformaciones de una estructura serán, al igual que las resultantes de tensiones, la suma de dos componentes, como se representa en la ecuación (7); una componente expresa la respuesta elástica a la carga aplicada, y la segunda la respuesta a los movimientos desconocidos impuestos por el entorno. La respuesta elástica, suponiendo unas condiciones de contorno perfectas, se puede calcular, y lo único que el proyectista puede hacer es utilizar su criterio y experiencia para decidir si estas estimaciones sobre las deformaciones elásticas son aceptables.

Estabilidad

Hay además otro sentido en el que las deformaciones podrían ser importantes para el comportamiento de una estructura. El análisis convencional se basa en la hipótesis de «pequeñas deformaciones»; en este contexto, pequeñas implica que la geometría general de la estructura no cambia de manera significativa, por lo que las ecuaciones de equilibrio escritas para la estructura no cargada, no variarán al cargarla. Este es, de hecho, uno de los requisitos principales para que

los teoremas plásticos sean válidos; en particular, el «teorema de la seguridad» no seguirá siendo la base firme en la que se sustenta un cálculo real, si las deformaciones no son pequeñas. Un ejemplo típico es el de un pórtico abierto, como un pórtico a dos aguas, en el que puede ponerse en cuestión la estabilidad general (implicando el llamado efecto «$P\Delta$»).

El teorema de la seguridad, aunque se demuestra por las ideas plásticas, se puede aplicar por supuesto a cualquier estructura razonable —la estructura en sí (continuando con la visión antropomórfica) no tiene conocimiento de si ha sido calculada por un programa de ordenador elástico o plástico. Si la estructura construida sólo experimenta pequeñas deformaciones, y es de un material dúctil (como el acero o el hormigón armado, pero no de vidrio o hierro fundido), su resistencia no se verá afectada por las imperfecciones de fabricación o montaje, o por las agresiones de un entorno hostil; estas anomalías desconocidas pueden conducir a deformaciones internas excesivas, pero la capacidad de carga de la estructura se habrá estimado con bastante precisión mediante un análisis plástico. La ductilidad es el segundo requisito principal para el proyecto de una estructura real segura.

Sin embargo, hay ciertas condiciones que pueden hacer que una estructura ejecutada con un material dúctil y que experimenta pequeñas deformaciones, que se pueden despreciar, tenga un comportamiento global no dúctil. La esencia de la ductilidad es que se pueden producir desplazamientos (razonables) sin comprometer el equilibrio —un ejemplo sencillo es una barra de acero en un entramado trabajando al límite de cedencia, que puede alargarse bajo una carga constante (y así redistribuir las fuerzas a otras barras con una tensión menor). Una barra similar a compresión, y con una tensión inferior a la de cedencia, ya no es dúctil; una vez que se alcanza una cierta carga (crítica), puede pandear y perder su capacidad de carga, llevando tal vez a un colapso catastrófico global. Este comportamiento es inadmisible, y el proyectista debe asegurarse de que no se produce. En principio no hay ninguna dificultad en ello. El fenómeno del pandeo es bien conocido; un pilar de un pórtico de edificación, por ejemplo, sometido a momentos conocidos en los extremos y con carga axial, puede ser proyectado para evitar el pandeo lateral y por torsión.

El problema radica, no en una elaborada teoría del comportamiento inestable, sino en determinar las condiciones para las que el elemento estructural debe ser evaluado. Por ejemplo, el pórtico continuo de sección uniforme (un ejemplo idealizado) mostrado en la figura 15.6 (a) se puede analizar obteniendo los momentos flectores elásticos indicados en la figura 15.6 (b). El proyectista no es consciente de ningún problema; el análisis elástico muestra que cada uno de los pilares tiene doble curvatura, y para cualquier dimensionado se puede hacer la comprobación de estabilidad fácilmente. Sin embargo, el análisis se ha realizado suponiendo, por fuerza, que los apoyos del pilar no pueden deformarse ni girar, y una vez más, cualquier pequeña variación en una condición de contorno tendrá un gran efecto sobre los números que aparecen en la figura 15.6 (b).

El proyectista plástico es consciente inmediatamente del problema, pero no tiene resuelta la cuestión del proyecto frente al pandeo. Un análisis de «colapso» conduce a los momentos flectores señalados en la figura 15.6 (c) (la estructura real se construirá con una sección cuyo momento plástico completo sea de $6 \times 1{,}75 = 10{,}5$ unidades), quedando una indeterminación estática; el valor de M no se puede determinar. Todo lo que se puede decir es que M debe ser inferior a 6 y mayor de –1,2, correspondiendo con las figuras 6 (d) y (e). La figura 15.6 (e) representa la situación más desfavorable para los pilares, ya que ambos presentan una curvatura simple; esta situación se produciría por un pequeño asiento del pilar izquierdo. La figura 15.6 (d) representa la situación menos peligrosa.

Así, el proyectista elástico directamente usaría la distribución de momentos de la figura 15.6 (b), mientras que el proyectista plástico se ve obligado a tomar una decisión y puede utilizar la distribución de la figura 15.6 (f), en la que se ha realizado un (sospechoso) análisis elástico de los pilares —nuevamente los apoyos de los pilares se han supuesto perfectamente fijos.

Estas consideraciones dan soporte a la práctica habitual actual de una filosofía de proyecto «viga débil-pilar fuerte». Es posible que las vigas en un pórtico de edificación deban ser comprobadas a pandeo lateral por torsión, sin embargo, a menudo están bien arriostradas, de manera que la principal consideración es la resistencia a flexión; por lo tanto pueden ser dimensionadas en base a un cálculo «plástico», usando las secciones más pequeñas posibles. Por otra parte, los pilares deben proyectarse con márgenes de seguridad adecuados a la ignorancia del proyectista

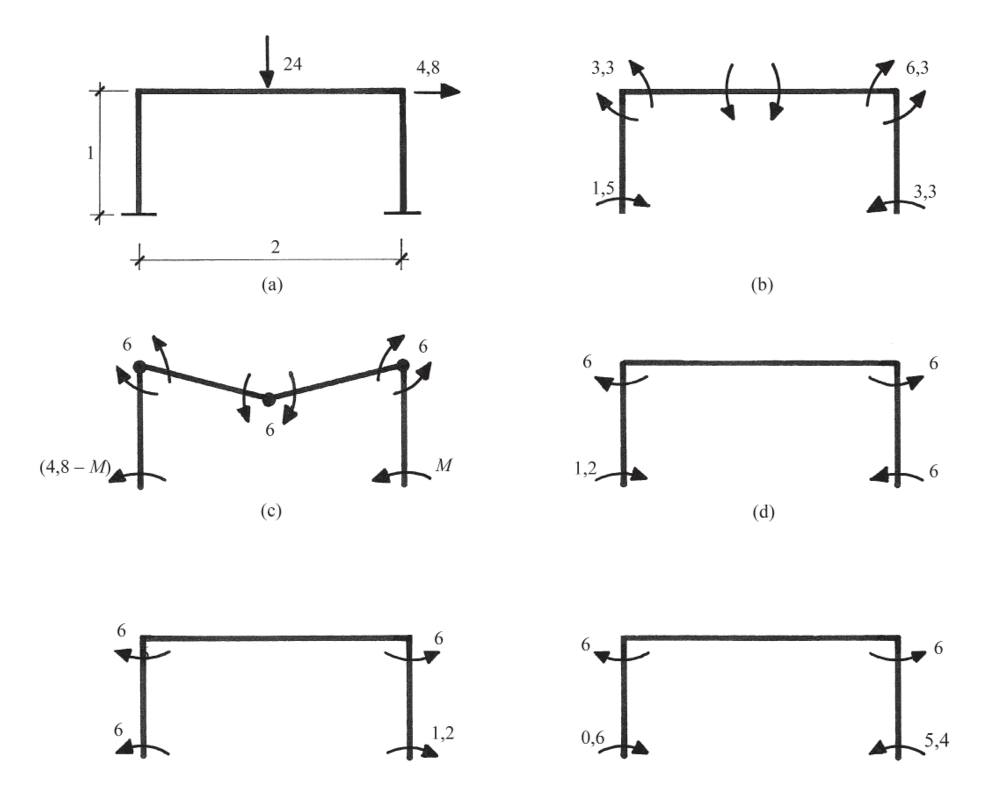


Figura 15.6
Posibles momentos flectores para un pórtico ideal. ¿Cuál debería usarse para el cálculo de los pilares?

de las condiciones exactas de trabajo, y es conveniente que las normativas de construcción actuales incorporen este margen, incluso si su valor no se conoce con precisión.

Escolio

El «estado» de una estructura consiste en un conjunto de resultantes de tensiones internas que están en equilibrio con la carga externa dada. Estas resultantes de tensiones internas, para un material ligeramente deformable, conducen a pequeñas deformaciones locales de los miembros de la estructura, y éstas se manifestarán como deformaciones del conjunto. Sin embargo, el estado de equilibrio descrito no es único en una estructura hiperestática: es uno de los infinitos estados posibles. El estado «real» —aquí y ahora, pero que puede cambiar con el tiempo— es el impuesto por los movimientos externos de los puntos de unión con el entorno; y las deformaciones globales son las producidas por esos movimientos externos en una estructura sometida a una carga externa dada. Los movimientos externos son en general desconocidos e incognoscibles; pueden ser clasificados como imperfecciones.

Para los pórticos (hiperestáticos) modernos de edificación de acero (o aluminio) o de hormigón armado, estas afirmaciones son verdaderas por deducción; en el caso de las fábricas, son visiblemente correctas. La estructura de fábrica —un puente en arco, una bóveda alta de piedra— está agrietada frecuentemente, y el estado se puede literalmente, ver. Los agrietamientos no se pueden explicar a partir de los resultados de un análisis de las tensiones internas: las grietas son el resultado de las deformaciones impuestas a la fábrica por los movimientos de los apoyos, y se formarán de manera que haya equilibrio general bajo la carga externa.

Cualquier esquema de cálculo —el de elementos finitos elásticos, por ejemplo— que pretende determinar la situación real de una estructura (tensiones y deformaciones internas) conduce sólo a un estado posible de equilibrio; un estado que, además, no es observable en la realidad. El método plástico de proyecto selecciona el estado de equilibrio que conduce nominalmente a las tensiones más bajas posibles para toda la estructura; ese estado «plástico» tampoco es observable, pero el proyecto es seguro.

16
Un relato peculiar

La siguiente carta al editor de *The Times* se publicó el 3 de febrero de 1967:

> Sir, – En el volumen 100 de *Archaeologia* (de 1966), recientemente publicado, hay un entendido artículo de R. W. McDowell, J. T. Smith, y C. G. Stell sobre las techumbres de madera del presbiterio y del transepto norte de la Abadía de Westminster, que han sido estudiados por estos caballeros en los últimos años. Pero no disponemos de tales estudios sobre las techumbres de la nave y del transepto sur, y los autores escriben: «Hacia 1964 toda la techumbre de la nave había sido reconstruida y la techumbre del transepto sur había sido retirada y su reconstrucción estaba en marcha».
>
> Desde hace algunos años he estado interesado en las medidas de conservación de los edificios eclesiásticos. Esto me lleva a preguntar si esta frase implica que la techumbre de la nave desapareció sin un estudio. Apenas lo puedo creer teniendo en cuenta el interés nacional y el orgullo que supone la Abadía. ¿Puedo, a través de usted, Sir, preguntar al Deán y al Cabildo que pasó?
>
> ¿De qué época eran las maderas? ¿En qué estado estaban? Y, ¿donde están ahora?
>
> Atentamente,
> Nikolaus Pevsner.
> Birkbeck College, University of London, Malet Street, WC1,
> Feb. 1.

Pevsner escribe desde el Birkbeck College, donde era profesor de Historia del Arte desde 1959, en los días en que había pocos profesores; no obstante, por entonces aquel título acarreaba connotaciones peyorativas en algunos círculos de Inglaterra. Pevsner era un Luterano que cuando los Nazis llegaron al poder en 1933, estaba en la Facultad de Göttingen, de donde fue despedido por motivos raciales (era judío). Vino de inmediato a Inglaterra, donde se estableció como historiador extranjero profesional de la arquitectura, una profesión que producía desconfianza en la sensibilidad local, como la de John Betjeman, que podía tener un especial y profundo conocimiento de la arquitectura, pero no con el alcance dado por la formación a través de los amplios campos de la historia del arte. De hecho, Betjeman estaba acostumbrado a referirse a Pevsner como el Herr Doktor Professor. Pero una suave y quizás solapada carta de Pevsner debía ser contestada al más alto nivel, sobre todo porque cuatro días más tarde *The Times* publicó una segunda modesta petición, esta vez del profesor Frere, un arqueólogo de Oxford que más tarde se convirtió en miembro de la Royal Comission for Historical Monuments de Inglaterra. (Pevsner era miembro desde hacía poco tiempo, y Betjeman después también llegó a ser miembro de la Comisión.)

> Sir, – Hay una cuestión adicional que debe ser sometida a las autoridades de la Abadía de Westminster, además de las tan justamente planteadas

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «A peculiar tale,» *Construction History Society Newsletter,* N° 72 (2005): 1–8. Traducción de Fabián López Ulloa.

por el profesor Pevsner (3 de febrero). Los grandes maderos de procedencia conocida, ya maduros y cortados en fechas conocidas del siglo XIII y posteriores, son extraordinariamente valiosos para la investigación dendrocronológica —un tema estudiado con dificultad en este país debido a la falta de material antiguo. ¿Todas estas maderas, de gran potencial científico en este aspecto, se han desechado sin pensar?

Atentamente
Sheppard Frere.
All Souls College, Oxford, Feb. 3.

El Deán de Westminster dio su respuesta en una carta publicada el 11 de febrero:

Sir, – En su carta del 3 de febrero, en la que pregunta si la madera de las techumbres de la nave y del transepto sur de la Abadía de Westminster fueron estudiadas por la Royal Comission for Historical Monuments, quizás el Profesor Pevsner ha pasado por alto la última frase del artículo del volumen 100 de *Archaeologia*, que dio pie a su carta: «Por desgracia, la Comisión no realizó el expediente antes de la publicación del Inventario de la Abadía en 1924; se espera que el presente artículo pueda corregir en parte esta carencia.»

Dada la publicación por la Comisión de su admirable volumen sobre la Abadía de Westminster de ese año, dicha Comisión ha estado informada sobre estas techumbres durante más de 40 años y, desde 1954, la presencia de andamios dejó claro que se estaba trabajando en ellas. Cuando se recibió una solicitud de la Comisión de hacer estudios del ábside y de las techumbres del transepto norte, se dieron las facilidades correspondientes; sin embargo, no se hizo una petición similar en relación con la nave y el transepto sur.

La reconstrucción de la techumbre de la nave se llevó a cabo bajo la dirección del Sr. S. E. Dykes Bower, Conservador (*surveyor*) de la Fábrica, y fue uno de los primeros elementos restaurados de la abadía, debido a su peligrosa condición estructural. Los maderos de roble habían sido atacados por la carcoma hasta perder su resistencia eficaz. Los intentos de conservar la mayor cantidad de material antiguo en lo posible mediante empalmes y reposiciones, demostraron ser tan desmedidos en tiempo, trabajo y dinero como para resultar poco económicos. El grado en que gran parte del roble se había torcido y deformado con el tiempo presentaba agudos problemas prácticos y lo que podría quedar de lo antiguo habría sido menos de lo que tendría que ser nuevo.

Aparte del coste astronómico, hubiera sido irracional perpetuar la techumbre, cuya forma original había sido ya hace mucho tiempo comprometida por alteraciones e inserciones de diferentes épocas, y todo con el propósito de corregir problemas que se sabe se desarrollaron en el tiempo de Sir Christopher Wren. Por ejemplo, en el transepto sur, varias armaduras de par y pendolón (*king post trusses*), en lugar de soportar la techumbre, estaban asentando y ejerciendo presión sobre el espinazo de la bóveda. Algunas del transepto sur lo hacían en un grado tan alarmante que tuvieron que ser alzadas con gatos —una operación en absoluto sencilla— para aliviar la bóveda de un peso que podría haber resultado peligroso.

Por otra parte, la techumbre, en su estado anterior, se había convertido en un bosque de madera constituyendo un grave riesgo de incendio. Era un asunto vital salvaguardar la Abadía de esta amenaza, y habría sido difícil justificar la perpetuidad de un sistema constructivo que había llegado a representar un lastre.

La seguridad, la economía, la reducción del riesgo de incendios, todo apuntaba a una forma de restaurar las techumbres que, aunque fieles a los principios de la construcción medieval, cumpliera las condiciones actuales de manera realista. La aspiración tanto de los arquitectos medievales como de la moderna ciencia de la construcción fue y es alcanzar resultados eficaces con la mayor economía de material. La techumbre de la nave y del transepto sur, tal y como ahora están restaurados, se encuentran más próximos a su forma original de la que habían tenido durante siglos y, como señala la Comisión, «la rigidez se obtiene por el método ingenioso de fijar listones en diagonal y en direcciones opuestas en las dos vertientes de la cubierta».

Las otras preguntas del Profesor Pevsner se pueden responder más brevemente. La fecha de los maderos de la techumbre de la nave se ha establecido en el erudito artículo al que él se ha referido: «En 1413 se trajeron noventa y dos carretadas de roble de Hendon para la techumbre, así como el roble del andamiaje.» «La erección de la techumbre sobre la parte nueva de la Nave comenzó… en 1468–9; los tres tramos siguientes fueron cubiertos en 1473–4, seguidos por otros tres tramos en 1475–8… el último tramo se cubrió bien en 1490–1 ó en 1501–2.» El artículo también resume las adiciones posteriores y la restauración parcial de los maderos.

Como se ha dicho, los maderos de roble habían quedado inservibles por la acción de la carcoma. Cualquier longitud, por corta que fuera, que pudo ser salvada se rescató y se apartó para su reutilización en otras partes de la Abadía. En cuanto al resto de la madera, infectada en extremo, habría sido poco prudente guardarla, incluso si para tal fin el Deán y el Cabildo hubieran tenido un espacio disponible de almacenamiento, por lo que fue incinerada. El Profesor Frere puede lamentarlo; pero los maderos del Presbiterio, de mayor antigüedad que los desechados de la nave, están allí para su estudio, como se deja claro en el artículo académico en *Archaeologia*.

Soy, Sir, su seguro servidor,
ERIC S. ABBOTT.
Deanato, Westminster, S.W.1, Feb. 9.

Esta carta del Deán no satisfizo a Pevsner, y en su siguiente carta a *The Times*, publicada el 16 de febrero, se exponen las auténticas preocupaciones de Pevsner:

Sir, – La respuesta del Deán de Westminster (11 de febrero) a mi carta (3 de febrero) es larga, pero no responde a mis preguntas.

Eran éstas: cuando el Deán y Cabildo, y el *surveyor*, decidieron reemplazar las techumbres, ¿se realizó un levantamiento tan detallado y académico como el que se ha publicado ahora en *Archaeologia* sobre las techumbres restantes?, ¿fue llamado un experto en techumbres medievales?, y, finalmente, ¿qué ha pasado con los maderos medievales desechados? Las respuestas a estas preguntas son sin duda necesarias.

Si no se hizo ningún estudio y levantamiento de este tipo, y no fue llamado ningún experto, y si los maderos fueron destruidos, esto no sólo constituiría una información profundamente alarmante, sino que también revelaría una situación legal intolerable; porque a ningún propietario privado de una casa señorial medieval de valor arquitectónico se le permitiría hacer algo así a su techumbre sin la autorización del Ministerio de Vivienda y del Gobierno Local.

Suyo etc.,
NIKOLAUS PEVSNER
18 Gower Street, W.C.1, 14 de febrero.

La carta fue contestada inmediatamente por otra de uno de los tres autores del «erudito artículo» sobre la techumbre; en ella se hacen pequeñas correcciones académicas al artículo; los autores escriben desde la Royal Comission for Historical Monuments (Inglaterra).

Pevsner responde esta vez desde Gower Street, sede del University College de Londres, y de su Slade School of Fine Art, pero podría también haber escrito desde Wildwood Grove, en el extremo norte (hacia Golders Green) de Hampstead Heath, donde había creado una colonia familiar, el «Pevsner Gulag», ocupando finalmente varias casas en Grove y Terrace. La principal objeción está en la segunda mitad del último párrafo de su carta. Los edificios que se «registran» como de valor histórico y arquitectónico están sujetos al control del Gobierno, ahora ejercido por el English Heritage, pero en 1967 a cargo del Ministerio de Vivienda. En esencia, no se pueden hacer ni adiciones ni alteraciones a estos edificios sin permiso, y si se concede, se otorgará sólo después de una inspección detallada. Sin embargo, la Iglesia de Inglaterra tenía asegurada una «exención eclesiástica» para sus edificios, y podía proceder con sujeción únicamente a su propia jerarquía de comités y asesores profesionales. Estos «guardianes» son eficaces, y en particular lo son en el momento actual, en que el Gobierno dispone de sustanciales subvenciones para ayudar en la reparación y renovación de las iglesias parroquiales. Las subvenciones son administradas a través del English Heritage, que mantiene un cuerpo de expertos arquitectos e ingenieros, que ofrecen consejos detallados al arquitecto local a cargo de la obra. El consejo no es obligatorio, pero si no se sigue, las subvenciones no se darán.

Las catedrales (y en un sentido muy importante la Abadía de Westminster no es técnicamente una catedral) tienen la misma exención eclesiástica pero, hasta el Care of Cathedrals Measure (Ley para el Cuidado de las Catedrales) de 1990, promulgada en 1991, no había organismos que pudieran restringir a Deanes y Cabildos. En 1967, el Deán de Westminster, con su Cabildo, podía hacer todo lo que quisiera con la fábrica de la Abadía, y esto es lo que Pevsner encontraba intolerable.

Era hora de que los profesionales se sumasen al intercambio epistolar, y el 18 de febrero *The Times* publicó una carta de Stephen Dykes Bower:

Sir, – La carta del Deán de Westminster en su número del 11 de febrero, que el profesor Pevsner

afirma (16 de febrero) no respondió a sus preguntas, explicó claramente que, aunque se hizo una inspección de la techumbre del transepto norte y del ábside, por la Royal Comission for Historical Monuments, no se hizo ningún estudio de este tipo de la nave ni del transepto sur porque jamás fue recibida ninguna petición a tal efecto.

Dado que el Profesor Pevsner es, creo, un miembro de la Comisión, y en las 82 páginas de las 585 dedicadas a la Abadía en su libro sobre Londres y Westminster de su serie *Buildings of England*, no hace ni una sola mención de las techumbres sobre las que ahora muestra tal preocupación, ¿no habrá quizá que contestar a otro tipo de pregunta?

A su pregunta «¿qué ha pasado con los maderos medievales desechados?» la carta de respuesta del Deán fue igualmente explícita. La madera sumamente deteriorada e inútil fue destruida: la que se pudo rescatar se apartó para su reutilización donde fuera adecuado. ¿Sería razonable, por no decir posible, conservar cientos de vigas de gran longitud, tan comidas por la carcoma que carecen de valor alguno?

La pregunta restante del profesor «¿fue llamado un experto en techumbres medievales?» no puede ser interpretada más que como algo personal. Pero voy a hacer algunas observaciones al respecto. El último párrafo de la amable carta de los autores del artículo de *Archaeologia*, con razón elogiado como «detallado y científico», es implícitamente un reconocimiento de que los expertos no son infalibles. Ciertamente, no siempre están de acuerdo.

El Deán y el Cabildo contrataron los servicios de un experto entomólogo y un ingeniero consultor de cuyo consejo estoy agradecido por servirme para cuestiones que afectan a la seguridad del edificio. Desde sus respectivos puntos de vista los dos dieron su apoyo a las medidas tomadas para garantizar la seguridad de las techumbres.

El Profesor Pevsner comete el error —no infrecuente entre aquellos que no tienen a su cargo edificios— de identificar cualquier restauración, con la perpetuación del estado actual o con una exacta sustitución. Puede que deba ser así. Pero tratar como improcedente cualquier cambio, ya sea del método, diseño o material, en el supuesto de que de esta forma se falsea la historia, no es realista y fácilmente puede llegar a ser pedante.

Una visión miope es inadecuada y otros deben juzgar si la restauración llevada acabo en la Abadía de Westminster en los últimos años es de una naturaleza tan alarmante, como para crear «una situación legal intolerable».

Suyo & c.,
S. E. Dykes Bower, Surveyor of the Fabric, Abadía de Westminster,
6 The Little Cloister, Abadía de Westminster, S. W.1. (sin fecha)

Dykes Bower era el decimoquinto *Surveyor of the Fabric*; el primero fue Sir Christopher Wren, designado en 1699 para hacerse cargo de las reparaciones de la Abadía (la construcción de San Pablo estaba bien avanzada por aquel tiempo, y Wren ya tenía 67 años). La palabra *surveyor* puede equipararse a la palabra moderna de arquitecto —y de hecho lo fue en 1699, pero por muy poco tiempo. Wren fue el primer arquitecto moderno en Inglaterra (sin contar el trabajo del escenógrafo Íñigo Jones) —un arquitecto en el sentido de que era alguien preparado para proyectar y dirigir la construcción de grandes obras, sin necesidad de haberse tomado el trabajo de aprender a construir. Antes del Gran Incendio de 1666 la construcción estaba en manos de maestros constructores medievales, que primero proyectaron y después construyeron grandes casas, iglesias y catedrales, y que a menudo eran dueños de sus propias canteras. La enorme escala de la reconstrucción de Londres forzó a la profesión a algo muy parecido a su forma moderna, y los arquitectos ya no aprendieron su oficio por la vía del obrero, oficial, maestro, surveyor, sino por el aprendizaje en un estudio de arquitectura; Hawksmoor fue como tal el primer arquitecto inglés, graduado en el primer estudio inglés, el de Wren.

Todas las catedrales inglesas (siguiendo el Care of Cathedrals Measure de 1990) están obligadas por ley a emplear un arquitecto cualificado para supervisar la fábrica, y para hacer un extenso informe escrito cada cinco años. La mayoría de las catedrales ya hacían esto, y Westminster ha tenido Surveyor ininterrumpidamente desde 1699. (En Westminster el surveyor tiene su propia toga y sitial en el coro —es más, toma posesión de su cargo en una ceremonia. Ha habido hasta ahora cuatro mujeres surveyor en las catedrales Inglesas.)

Como surveyor, Dykes Bower había desde luego asesorado al Deán en su carta publicada el 11 de febrero; en la propia carta de Dykes Bower éste se refirió a

un consultor entomólogo, y *The Times* publicó lo siguiente el 20 de febrero:

Sir, – Soy Consultor Entomólogo de la Abadía, y como tal he tenido que asesorar sobre el estado de todos los maderos.

En la nave y el transepto sur, las techumbres estaban tan atacadas por la carcoma y diversos insectos, además de estar deformadas y distorsionadas, que eran inseguras para seguir en uso. Los grandes huecos internos y la destrucción de las ensambladuras, etc., hicieron esencial su sustitución.

Como el Deán ha dicho en su carta (11 de febrero) no hay espacio de almacenamiento; además, aunque hubiera sido posible, guardar madera estructuralmente inútil y sumamente infestada cerca de la Abadía hubiera supuesto un riesgo que no podíamos asumir.

Soy, Sir, su seguro servidor,

A. W. McKenny-Hughes
France Corner, Chalfont Hill, Gloucestershire, Feb. 17

Curiosamente, en la misma página hay una carta del Secretario de la Ancient Monuments Society:

Sir, – El reverendo Giles Hunt dice (17 de febrero) que las catedrales no pueden recibir la protección de leyes y planes de conservación «hasta que el público británico esté preparado para pagar la factura que permita mantener las catedrales en buen estado».

Debió pasarle inadvertido que el Historic Buildings and Ancient Monuments Act (Ley sobre Edificios Históricos y Monumentos Antiguos), de 1953, pone los edificios eclesiásticos y seculares exactamente al mismo nivel en lo que se refiere a las subvenciones del Ministerio para la reparación de edificios de «sobresaliente interés histórico o arquitectónico». Como todas las catedrales británicas sin duda, estarían bajo esa descripción, todas ellas podrían solicitar ayudas para sus reparaciones; y la única razón por la que no se solicitan es porque las autoridades eclesiásticas han luchado, y ganado, un derecho a la exención de los controles a los que están sujetos los edificios seculares.

Esto es absolutamente indefendible, pero mientras continúe, las autoridades eclesiásticas son las únicas culpables si se quedan solas «para pagar la factura del mantenimiento de las catedrales en buen estado». Nunca he visto esto explicado en las solicitudes de ninguna catedral.

Atentamente,
Ivor Bulmer-Thomas, Secretario, Ancient Monuments Society,
12 Edwardes Square, W.8, 19 Feb.

Las catedrales habían luchado por su autonomía durante un largo período, y sólo cedieron en 1990, después de casi 100 años de éxito en su resistencia. Eran muy conscientes de que su falta de control las hacía inelegibles para las subvenciones gubernamentales —estuvieron dispuestos a pagar este precio imaginario en aras de la libertad de la interferencia del Estado. Fue una combinación de circunstancias —por encima de todo, el enorme costo de las reparaciones— lo que llevó al decreto (*Measure*) de 1990; ya en 1967 las «sociedades culturales», como la Ancient Monuments Society, encontraban la situación indefendible.

El 22 de febrero, Lord Euston (ahora Duque de Grafton) escribió a *The Times* en nombre de otra sociedad cultural, y su carta fue publicada el 25 de febrero:

Sir, – La extensa intervención en las techumbres de la Abadía de Westminster ha sido un tema de gran preocupación para la sociedad y para un público más amplio, como lo demuestra la reciente correspondencia en su periódico.

Hace dos años, arquitectos miembros de mi comité visitaron la Abadía y se les dio la oportunidad de inspeccionar las techumbres con el surveyor de la fábrica y su ingeniero consultor.

Las techumbres de madera de la nave y la mayor parte del transepto sur ya habían sido renovadas y por lo tanto el comité no podía hacer comentarios sobre su condición. Era evidente, sin embargo, que las techumbres que perduraron en el ábside y el transepto norte estaban en mejores condiciones, lo que no justificaría una intervención de conservación.

En la reunión, el surveyor de la fábrica propuso que se permitiera a la sociedad examinar el estado de las techumbres de madera cuando se pusieran en marcha las obras de reparación de esta parte.

Atentamente,
Euston, Presidente.
The Society for the Protection of Ancient Buildings, 55 Great Ormond Street, W.C.1, Feb. 22.

The Times concluyó la correspondencia el 28 de febrero con una carta relativamente suave de Pevsner:

Sir, – El Sr. Dykes Bower (18 de febrero), surveyor de la Abadía de Westminster, me malinterpreta. Yo no he dicho que las techumbres en cuestión no debieron haber sido destruidas.

¿Cómo hubiera podido juzgar ese asunto? Pero sí dije que en cualquier caso, se debería haber realizado y publicado un estudio académico. En segundo lugar dije que se debió haber llamado a alguno de los escasos expertos especializados en techumbres medievales, para que diera una segunda opinión a los surveyors, quienes no pueden ser tan conocedores como ellos en este campo tan particular.

Cuidar estos dos aspectos —estoy convencido— era un deber moral del Deán y del Cabildo y lo será de nuevo, cada vez que se sugieran futuras mejoras.

Atentamente, etc.,
N. Pevsner
Birkbeck College (University of London), Malet Street, WC1.
(sin fecha)

Las diversas opiniones cruzadas expuestas en esta correspondencia son evidentes, con los actores formando a veces alianzas inverosímiles. En el fondo, la batalla se da entre los profesionales, el arquitecto, el ingeniero, el entomólogo, es decir, los «actores»; y los amateurs, el historiador del arte, el arqueólogo y los autoproclamados guardianes del patrimonio, es decir, los «*gentlemen*». La diferencia esencial entre los dos grupos es que el arquitecto, con sus asesores cualificados, es responsable no sólo del bienestar estético de su edificio, sino también de su seguridad física. (Se me puede vislumbrar en algunos puntos de esta narración, pero es sólo en este paréntesis que yo aparezco en *propria persona*. Yo estaba hablando con Dykes Bower sobre los problemas de la Abadía cuando de repente me hizo una pregunta hipotética. Suponga, dijo, que seis días antes de la coronación de la reina Isabel II en 1953 yo hubiese entrado en la Abadía, y un sacristán me hubiera informado de la caída de un pedazo de piedra, del tamaño de una naranja, exactamente en el lugar donde estaba ubicada la silla de la coronación, ¿qué habría hecho usted, sabiendo que dentro de seis días el órgano y los metales de la orquesta harían temblar los cristales con los coros cantando el Vivat Regina? Le contesté que yo subiría tan alto como fuera posible, al triforio y cuerpo de luces, para inspeccionar minuciosamente la bóveda mayor con potentes prismáticos. Por supuesto, no encontraría nada. Tal vez no sería necesario matar al sacristán, pero le haría hacer un terrible juramento de secreto. Después, no haría y no diría nada. De acuerdo, contestó Dykes Bower.) Los surveyors suelen ser despectivos con lo que consideran una interferencia ignorante. Por su parte, los «*gentlemen*» (y el término se amplía en este caso para incluir a los profesores) están igualmente indignados de que el clero, asesorado por sus profesionales, puedan proceder en sus iglesias, casi como a ellos les plaza.

La carta de Pevsner del 3 de febrero de 1967 no vino enteramente de la nada. Más de un año antes (10 de diciembre 1965) el marqués de Salisbury, como Presidente de la Royal Comission of Historical Monuments (Inglaterra), había escrito al Deán de Westminster incluyendo un borrador del artículo mencionado por Pevsner, que iba a ser publicado en 1966 en *Archaeologia*, la revista de la Society of Antiquaries. En su carta, Salisbury y sus colegas de la Comisión aceptan las circunstancias que habían conducido a una amplia renovación de las techumbres de la Abadía, pero abogaban por mantener la notable techumbre (siglo XIII) sobre el ábside. (Dykes Bower había terminado los trabajos en las cubiertas de la nave y del transepto sur; las obras en el transepto norte estaban a punto de comenzar; la techumbre restante pertenecía al presbiterio y ábside.)

Dykes Bower escribió al Deán el 15 de febrero de 1966, comentando la carta de Salisbury y el artículo de *Archaeologia*; parte de esta carta se incorporó en la carta del Deán a *The Times* del 11 de febrero de 1967. En resumen, la restauración comenzó con el objetivo de mantener tanto material antiguo como fuese posible, por empalme y sobreposición de madera nueva y reparando donde fuese necesario. Pronto se encontró, sin embargo, que el costo de este trabajo era «astronómicamente» alto; además, las techumbres, que se habían vuelto estructuralmente débiles, no estaban reforzadas apropiadamente. Sobre los motivos, por lo tanto, de coste, seguridad y (como el Deán menciona en su carta) riesgo de incendios, era necesario un enfoque más radical. Por

último, tras la lectura del borrador del artículo de *Archaeologia*, Dykes Bower se opone a la frase «la techumbre de la nave había sido reconstruida», y sugiere el uso de la palabra *restaurada*. Esta carta fue enviada a Lord Salisbury, quien escribió al Deán que aunque la Royal Comission era de la opinión de que las techumbres habían sido de hecho totalmente rehechas, tal vez la palabra *reconstruida* podría ser usada; esta es la palabra publicada en la versión final. Salisbury también propuso añadir una frase final al artículo (y así se hizo): «De manera muy desafortunada, la Comisión no hizo un estudio (de las techumbres) antes de la publicación del Inventario de la Abadía en 1924, pero se espera que el presente artículo añada información». Esta fue una disculpa considerada y oportuna. En 1924 no se pensaba que las techumbres medievales de madera (y mucho más tarde, hacia 1980, los armazones de las campanas) tuvieran mucha importancia arqueológica; las sustituciones se realizaron en gran medida, sin ningún registro. De hecho en el volumen de 1924 de la Royal Comission sobre la Abadía no se hace mención en absoluto de las techumbres; después de la primera publicación se insertó un *addendum* con una breve descripción.

La Royal Comission se había fundado en 1908 bajo la rúbrica de Eduardo VII (Edward the Seventh's Royal Sign Manual):

> Considerando que hemos estimado oportuno que una Comisión deba inmediatamente mandar hacer un inventario de los Monumentos Antiguos e Históricos y Construcciones vinculados o ilustrativos de la cultura contemporánea, la civilización y condiciones de vida de la gente en Inglaterra, con exclusión de Monmouthshire, desde los primeros tiempos hasta el año 1700, y para especificar cuáles parecen más dignos de protección:
> Ahora sabéis . . .

y siguen los nombres de los once Comisionados. Estos fueron, el Baron Burghclere, el Conde de Plymouth, el Vizconde Dillon, y David Alexander Edward Lindsay, Esquire, comúnmente llamado Lord Balcarres, juntos con siete «expertos», entre ellos un arquitecto, un Profesor de Historia Antigua, y dos arqueólogos. (Lindsay, como vigésimo séptimo conde de Crawford, fue más tarde presidente de la Comisión por muchos años.) La Comisión informó tres años más tarde, en 1911, con un *Inventary of the Historical Monuments of Hertfordshire*; el volumen se publicó lujosamente, con un gran número de buenas fotografías. Este excelente estilo se continuó en todos los volúmenes posteriores; hubo dos sobre *Buckinghamshire*, 1912 y 1913; cuatro sobre *Essex*, 1916, 1921, 1922 y 1923; *Huntingdonshire*, 1926; cinco volúmenes sobre Londres 1924–1930, que incluyeron el volumen dedicado a la Abadía de Westminster; *Herefordshire*, tres volúmenes, 1931–1934; *Westmoreland*, 1936; *Middlesex*, 1937; y la *City of Oxford*, 1939. La publicación se reanudó en 1952 después de la Segunda Guerra Mundial, pero en 1967, después de casi sesenta años, sólo estos siete condados habían sido publicados por la Royal Comission. (La *City of Cambridge* se describió en dos magníficos volúmenes en 1959.)

En 1913 una orden de Jorge V extendió la fecha de 1700 a 1714 (la muerte de la reina Ana y la ascensión de Jorge I de la Casa de Hanover), y en 1946 Jorge VI «consideró prudente que las actuaciones de la Comisión Real… abarcaran el período comprendido hasta y, a su discreción, con posterioridad al año 1714.» (En 1951, los Comisionados seleccionaron la fecha final como 1850.) En un diferente nivel de erudición, y dirigido a diferentes lectores, las *Shell Guides* comenzaron a publicarse en 1934 con *Cornwall* de John Betjeman; un año más tarde Betjeman fue nombrado editor general de la colección, y se publicaron trece volúmenes en 1939. La colección se continuó después de la II Guerra Mundial, y más de treinta condados fueron finalmente cubiertos. Las *Shell Guides* describieron por supuesto, los edificios que se encontraban en Inglaterra, pero fueron guías de los condados en su conjunto, en lugar de monografías de arquitectura. Varios autores estuvieron implicados, y se les permitió ser idiosincrásicos, incluso extravagantes —en el *Devon* de Betjeman de 1936 hay recetas para mantenerse a salvo de los duendes. Por el contrario, *Buildings of England* de Pevsner, puede considerarse como una respuesta profesional a las *Shell Guides*. Quizá no sea casualidad que el primer volumen, que fue publicado en 1951, fuese *Cornwall*; el volumen final, el cuarenta y seis, apareció en 1974. Para los volúmenes posteriores Pevsner tuvo coautores, pero todo se hizo con un presupuesto muy limitado. El propio Pevsner era un académico a tiempo completo; había contratados dos historiadores de arte refugiados dedicados a la investigación bibliográfica; y la esposa de Pevsner conducía el coche y planeaba los itinerarios durante la Pascua y

las vacaciones de verano. De esta manera, en veinte y tres años, fueron escritos los cuarenta y seis volúmenes. Se diseñaron primero para ser libros en rústica de bolsillo, pero evidentemente eran unas fuentes de tal valor, que pronto se publicaron en tapa dura, conservando el mismo formato pequeño. Las ilustraciones fotográficas, numerosas aunque no en la generosa escala de los volúmenes de la Royal Comission, no son de la mejor calidad; pero los cuarenta y seis volúmenes, incluso en detalles superficiales, se pueden comparar con la escasa producción de la Royal Comission durante tres cuartos de siglo.

De hecho, el trabajo de la Royal Comission llegó a ser más y más especializado; los «expertos» de la comisión tenían un profundo interés en las antigüedades y la arqueología, y hubo pocos representantes de arquitectos o historiadores del arte. A finales de 1970 la Comisión ya dio aviso de su cambio de enfoque, y está en la actualidad obsoleta, ahogada bajo el peso de su propia erudición. Los último volúmenes parecen tesis doctorales, con títulos tales como *Churches of South-East Wiltshire* (1987), o *The Medieval Houses of Kent* (1994). Como señaló Dykes Bower, Pevsner había sido nombrado para la Comisión en 1963. Recibió un título honorario de la Universidad de Oxford en 1968, pero él ya había dimitido de la Comisión «por otras obligaciones». Mientras tanto, el profesor Frere de Oxford había sido nombrado miembro en 1966; Betjeman fue nombrado en 1970. Así, la correspondencia en *The Times* de 1967 se estableció entre personas que estaban comprometidas, ya sea como caballeros o actores, en la conservación del patrimonio.

Esta correspondencia cesó en febrero de 1967, y en la calma subsiguiente el Deán y el Cabildo se sintieron capaces de reanudar los trabajos de reparación en la Abadía. Las techumbres de la nave y del transepto sur ya habían sido «reconstruidas», y la del transepto norte recibía ahora el mismo tratamiento. Esto dejó sólo las techumbres medievales del presbiterio y ábside —armaduras que habían sufrido continuas reparaciones a lo largo de los siglos, pero no, como se dice en el artículo en *Archaeologia*, en tiempos muy recientes.

El 5 de junio 1968 se dirigió una Petición a la Reina, escrita en papel con membrete de la Royal Comission of Historical Monuments (Inglaterra):

Si le place a Su Majestad,

Nosotros, los abajo firmantes, hacemos humilde entrega a Su Majestad de la siguiente Petición en virtud de su autoridad como *Visitor* de la Abadía de Westminster.

Como Su Majestad sabrá, un amplio programa de restauración de la estructura de la Abadía ha estado en progreso durante varios de años, y aunque algunas de las obras no han contado con la aprobación universal, ninguna ha despertado un alto grado de controversia hasta que fue comenzada la restauración de las grandes techumbres medievales por encima de las altas bóvedas.

Todas estas techumbres de madera, coetáneas con la construcción de la Abadía, sobrevivieron hasta hace poco. En 1964, la atención de la Royal Comission of Historical Monuments de Inglaterra estuvo orientada al hecho de que el conjunto de la techumbre de la nave había sido reconstruido y que la techumbre del transepto sur había sido retirada y su reconstrucción estaba en progreso. La Comisión inmediatamente hizo un registro detallado de las techumbres que sobreviven en el transepto norte y sobre el presbiterio y el ábside. El registro fue publicado en *Archaeologia* en 1966, y la Comisión envió una copia al Deán y al Cabildo instando firmemente a que se deberían hacer todos los esfuerzos para salvar las restantes estructuras medievales, pero especialmente la gran techumbre sobre el ábside, uno de los más notables ejemplos de su tiempo que sobreviven en este país.

Desde entonces, la techumbre del transepto norte ha sido completamente reconstruida, y un trabajo similar se ha iniciado en las techumbres del Presbiterio y del ábside; y ha quedado claro que dentro de un corto período de tiempo todas las techumbres medievales principales de la iglesia de la Abadía se habrán destruido; su desaparición significará la pérdida total de la posibilidad de estudio y análisis de las técnicas adoptadas en una de las obras mejor documentadas de la carpintería de la Edad Media.

El reemplazo de las restantes techumbres por obra nueva, incluso de un diseño similar, no compensaría la pérdida del estudio histórico y arqueológico. Tampoco se ha adoptado el diseño original en las nuevas cubiertas ya instaladas.

En las actuales circunstancias, no hemos sido capaces de organizar un examen profesional independiente de las techumbres sobrevivientes del Presbiterio y el ábside, pero estamos predispuestos a creer que su conservación con reparaciones in situ debe ser posible. Nos parece por lo tanto, que esta posibilidad debe explorarse plenamente para

que estas techumbres excepcionalmente importantes que han sobrevivido unos 700 años sin renovación puedan, si es posible, ser salvadas para futuras generaciones.

Nuestra humilde petición a Su Majestad, por tanto es que considere designar sin dilaciones a un pequeño Comité Consultivo de hombres de alta reputación para estudiar e informar de su postura respecto a estas techumbres y que mientras tanto los trabajos en ellas puedan ser suspendidos.

5 de junio 1968

Esta carta fue firmada por Lord Salisbury en nombre de la Royal Comission, y por Lord Euston en nombre de la Society for the Protection of Ancient Buildings.

El cuerpo administrativo de una catedral, por usar las palabras de la *Care of Cathedrals Measure* de 1990, es el Deán y el Cabildo; antes de la *Measure*, como se ha señalado, este cuerpo tenía prácticamente el control total de todos los asuntos relacionados con la Catedral, incluyendo, por ejemplo, la venta, o libre disposición, de cualquier propiedad conferida al Cabildo, que pudiera tener un gran valor arquitectónico, arqueológico, artístico o de interés histórico (usando de nuevo las palabras de la *Measure*). Sin embargo, había una autoridad fundamental, a la que se podía hacer una apelación: el *Visitor*, Visitador; el Visitador es el Obispo en cuya diócesis se sitúa la catedral. Así el Obispo de Londres es el Visitador de la Catedral de San Pablo, pero no es el Visitador de la Abadía de Westminster, y la Abadía es, en este sentido, «peculiar». De hecho, la Abadía de Westminster es una *Royal Peculiar*, una Propiedad Real —el Visitador es la Reina. (La Capilla de San Jorge en Windsor es otra *Royal Peculiar*.) Lord Salisbury y Lord Euston solicitaban a la Reina el uso sus poderes para detener al Deán y al Cabildo. La petición nunca fue enviada; su existencia fue suficiente para hacer que el Deán y el Cabildo siguieran su consejo. De hecho, ninguna obra se ha realizado todavía en la techumbre del ábside.

El Deán y el Cabildo llevaron a cabo algo muy parecido a un peritaje medieval con el fin de decidir sobre la mejor operación en la techumbre del siglo XIII. Con el asesoramiento del Royal Institute of British Architects y de la Institution of Civil Engineers nombraron cuatro expertos —dos arquitectos y dos ingenieros— para que informaran sobre el asunto; estos expertos no tenían permitido establecer contacto antes de la presentación de sus informes independientes. (Esto contrasta notablemente con la reunión de diez Maestros de toda Europa celebrada en Milán en 1401; las extensas actas de sus debates sobre el proyecto de la Catedral de Milán dan información valiosa sobre la práctica de la arquitectura medieval.) Uno de los arquitectos que debía informar independientemente sobre lo que pasaba en la Abadía, había sido en algún momento surveyor de tres grandes catedrales en Inglaterra y había llevado a cabo extensas reparaciones para estos y otros edificios antiguos; el otro arquitecto también tenía una amplia y relevante experiencia y, en cierto sentido, representaba a la Society for the Protection of Ancient Buildings. Uno de los ingenieros había tenido una importante relación con la Abadía como especialista habitual; el otro era un profesor que había publicado artículos sobre la mecánica de las estructuras de fábrica y de madera.

Los cuatro informes estaban escritos en un lenguaje sencillo, pero eran, por fuerza, técnicos, y fueron resumidos para el Deán a principios de 1969 por Dykes Bower. Los cuatro expertos encontraron que se necesitaban importantes reparaciones en la techumbre del ábside, y que tanto el proyecto original como la construcción eran defectuosos en muchos aspectos. Los dos ingenieros estaban a favor de desmontar la techumbre y reemplazarla por una nueva; los dos arquitectos pensaban que era mejor mantener la mayor cantidad de madera posible del siglo XIII, rellenando las juntas y cavidades con resina epoxi y realizando otras medidas de refuerzo. Todo esto lo resumió con detalle Dykes Bower, y al final de diez folios, concluye con una serie de observaciones y preguntas que ocupan un lugar central en la conservación y reparación de monumentos.

Que hay dos enfoques para este problema, es asunto que ahora quedará claro. El cuidado de los edificios antiguos induce a la tendencia a inclinarse inevitablemente hacia la conservación de cualquier cosa de valor, lo cual es correcto, a no perder nada que se pueda mantener. En la Abadía de Westminster esta tendencia alcanza su máxima expresión. Sin embargo, el propio sentido de continuidad que poseen las corporaciones y que genera una gran reverencia por el pasado, tiene que tener en cuenta también el futuro. ¿En qué condición se encuentra el edificio en que se va intervenir? ¿Cuál es su seguridad estructural? ¿Se deberían

legar a nuestros sucesores fuentes potenciales de problemas?

Estas preguntas exigen un equilibrio entre sentimiento y realismo. ¿Posee la techumbre del presbiterio y el ábside, pese a sus deficiencias estructurales, un valor histórico tan excepcional como para justificar el recurrir a cualquier medio para mantenerla? ¿Se podría aceptar que estos refuerzos serían eficaces al menos durante uno o dos siglos? ¿Justificará el coste de la preservación, difícil de estimar, el resultado? Cuando se colocan tres capas de madera blanda sobre unas armaduras de roble, cuyos miembros están rellenos en gran parte con resina epoxi, sus ensambles han sido reforzados con chapas de acero, cuyos estribos de apoyo y tirantes se han sustituido por elementos de hormigón armado, ¿qué queda de la techumbre original? Si es la piel reforzada la que soporta la techumbre, ¿habrá sido conservada o momificada?

Una nueva estructura de roble, también sobre una base de estribos y tirantes de hormigón pero conforme al proyecto original, ¿podría ser estéticamente e históricamente, racional, o sucedería al revés? ¿Es un error hacer en la actualidad lo que se hizo antes, pero incorporando los cambios que permiten los avances técnicos? Una mayor facilidad de inspección y mantenimiento, así como mayor libertad de movimiento para luchar contra el fuego en caso de emergencia, ¿podrían considerarse ventajas prácticas? ¿Es preferible la sencillez estructural a la mezcolanza de puntales y apoyos que, como resultado de las reparaciones, ha convertido la techumbre existente en un tinglado confuso?

Muchas de estas preguntas son, en realidad, imposibles de contestar.

Quizá era de esperar que cuatro expertos, escribiendo informes independientes, dieran puntos de vista diferentes. Dykes Bower ciertamente no dio una orientación clara al Deán y al Cabildo y se vieron obligados a designar a un quinto experto, un arquitecto muy distinguido, para que hiciera una evaluación de los cuatro informes. Él estuvo de acuerdo con la opinión de que la estructura de la techumbre estaba en un estado precario, y que las reparaciones eran urgentes; estuvo también de acuerdo con los cuatro expertos en que una viga perimetral de hormigón armado se debería insertar en torno al ábside y presbiterio con el fin de contener las fuerzas generadas por la cubierta de madera. De hecho gran parte del informe se refiere a la forma en la que dicha viga perimetral se debería insertar, si se iban a mantener los maderos existentes. Se mostró satisfecho de que este trabajo fuera factible, y se puso, en consecuencia, a favor de mantener tanta madera como fuera posible del siglo XIII, de la amplia utilización de las chapas y bridas de acero de refuerzo, y de emplear la resina epoxi con contención. El informe no daba especificaciones detalladas, pero indicaba los principios que se debían seguir, y que requerirían un estrecho control durante las reparaciones, teniendo que tomar muchas decisiones a medida que avanzase el trabajo. Esta fue la forma en que se realizó la obra en los siguientes meses.

Así, unos dos años después de la carta de Pevsner a *The Times*, el Deán fue capaz de hacer las reparaciones definitivas al ábside, manteniendo en su lugar la mayor parte de las maderas originales. El problema local se había resuelto, pero todavía se mantenía la «intolerable» situación de la Exención Eclesiástica; las catedrales de Inglaterra, y, a *fortiori*, la *Royal Peculiar* de la Abadía de Westminster, no estaban sujetas a los habituales controles Estatales impuestos a los monumentos registrados.

Unos veinte años antes el Council for the Care of Churches había establecido el Cathedrals Advisory Committee en un intento de persuadir a las catedrales de, al menos, recibir asesoramiento sobre sus problemas. Lord Euston era un antiguo miembro, y, como duque de Grafton, fue más tarde presidente del Comité. Como implica su nombre, el Comité era asesor, y carecía de funciones ejecutivas. Tenía como miembros tres o cuatro Deanes u otros clérigos, dos o tres arquitectos, un arqueólogo, un ingeniero e historiadores del arte, hasta un total de unos veinte. Durante sus casi cuarenta años de existencia fue, de hecho, cada vez más consultado por los Deanes y sus surveyors, ya que se estableció una sólida reserva de información y experiencia.

Dykes Bower fue sustituido como surveyor de la Abadía de Westminster por Peter Foster, y el Deán y el Cabildo aprovecharon la oportunidad para establecer un Architectural Advisory Panel, con una constitución parecida a la del Cathedrals Advisory Committee, aunque bastante menor en número. En el futuro, si surgiesen asuntos polémicos tales como la reconstrucción de las techumbres de madera, el Advisory Panel levantaría acta de las discusiones, aunque fue una queja a lo largo de su existencia que algunos asuntos llegaron demasiado tarde para ser por estudiados y tomar deci-

siones eficaces. La constitución de ambos Comités, el de las Catedrales y el de Westminster, por supuesto, cambiaba lentamente. Unos pocos miembros estaban en los dos; Betjeman sirvió en Westminster, pero no en el cuerpo central, y Pevsner no fue miembro de ninguno. Las reuniones de ambos órganos incluían la comida —sándwiches para el Comité y, para el Abbey Panel, una comida de tres platos con vino, en el esplendor de la Jerusalem Chamber, cerca de «otra cámara», donde, en 1413, el Príncipe Hal de Shakespeare se probaba la corona al mismo tiempo que su padre Enrique IV moría.

La reparaciones importantes de edificios antiguos parecen haber tenido lugar en intervalos de 100 años. Esto puede reflejar la renovación periódica de la preocupación pública por el patrimonio, o puede ser que las estructuras de fábrica y madera, si bien precisan reparación y mantenimiento continuo, exigen una intervención más importante pasado un largo intervalo. Ciertamente, en Gran Bretaña y Europa hubo actividad en la segunda mitad del siglo XVIII y, de nuevo, un siglo después. Otro cien años más tarde, veinticinco años después del final de la Segunda Guerra Mundial, muchas iglesias y catedrales en Gran Bretaña estaban en reparación. Las catedrales todavía no podían recibir subvenciones del Gobierno, pero algunas, con gran esfuerzo, tuvieron éxito en conseguir grandes cantidades de dinero. Ely, por ejemplo, lanzó un llamamiento público muy profesional, y consiguió 8 millones de libras para acometer un amplio programa de obras. En la Abadía de Westminster los *Trustees*, Patronos, con el príncipe Felipe de presidente, consiguieron reunir y gastar 20 millones de libras sólo a base de donaciones privadas; por supuesto, los detalles de la obra fueron presentados al nuevo Architectural Advisory Panel. No obstante, la envergadura del trabajo a nivel nacional era tal que los recursos privados no podían financiar todas las obras necesarias, algunas urgentes. Los Cabildos de las catedrales estaban pagando un alto precio por su independencia.

La posición anómala de las catedrales nuevamente se expuso públicamente en 1988, cuando Hereford estaba buscando grandes sumas para mantener su fábrica en buen estado. El Cabildo decidió vender una de sus posesiones, el Mappa Mundi de 1290, la representación sobre pergamino del mundo conocido (o imaginado) en el siglo XIII, junto a toda su biblioteca medieval. El escándalo resultante duró alrededor de un año, a partir de Noviembre 1988, cuando se supo que Sotheby's estaba subastando el mapa, hasta finales de 1989, cuando parecía que nada había sido resuelto pero, de hecho, otros acontecimientos habían hecho olvidar el asunto. *The Times* expuso los hechos el 17 de noviembre de 1988; la Catedral deseaba conseguir 7 millones de libras para reparaciones; los órganos encargados del patrimonio no habían sido consultados sobre la propuesta de venta; el National Heritage Memorial Found estaba «indignado», ya que existía precisamente para comprar obras para la nación en lugar de dejarlas escapar al exterior; una iglesia parroquial humilde no podía tomar tales medidas sin justificar su caso ante el canciller diocesano. Un día después Roy Strong, ex director del Victoria and Albert Museum, dimitió como protesta a su puesto en el Hereford Appeal Committee. Pero las ofertas para comprar el Mappa Mundi, al irresistible precio de 2,5 millones de libras, ya estaban llegando. Y los Deanes se estaban «rearmando»; el Deán de Salisbury, había dicho que «...si tuviéramos que elegir, que afortunadamente no lo hacemos, entre mantener la aguja [de la catedral] en pie o vender la Carta Magna a los americanos [la catedral de Salisbury posee una de las cuatro copias originales de la Carta Magna], no habría otra opción que salvar la aguja. Pero constituiría una terrible condena a nuestra vida nacional si nos viéramos obligados a tomar esa decisión».

No era en realidad cuestión de forzar una decisión. Los Deanes ya habían tirado la toalla; frente a las reparaciones imposibles de financiar, habían acordado, a cambio de la posibilidad de recibir la financiación del Gobierno, no oponerse a medidas para privar a las catedrales de su libertad de acción. El Sínodo General ya estaba elaborando una legislación que, entre otras cosas, impondría una nueva Cathedrals Fabric Commission en Inglaterra como un organismo de derecho público que supervisase los asuntos de las catedrales inglesas. De hecho, el Cathedrals Advisory Committee, sin poder, no había sido consultado en absoluto por la catedral de Hereford.

En Hereford los ánimos se estaban calentando. El Ayuntamiento de la ciudad instó al Deán a posponer la venta, y propuso elevar las tasas generales en un penique —esto generaría unas 70.000 libras al año, por lo que se tardarían cien años en obtener los 7 millones requeridos. Dentro de la primera semana del conocimiento público de la venta, el English Heritage, anunció que suspendería su concesión de

50.000 libras para la reparación del College of Vicars Choral del siglo XV (que se consideró en ese momento, como no se haría ahora, no como parte de la Catedral, sino como un mero monumento antiguo, y por lo tanto susceptible de ayuda del Gobierno) —el Deán de Hereford lo calificó de «chantaje». El 25 de noviembre el Arzobispo de Canterbury estaba buscando apoyos, haciendo un llamamiento para dar una nueva perspectiva a los mecanismos de ayuda financiera estatal para las Catedrales (él debería haber sabido que ya se había propuesto). Al siguiente día, el Cabildo de Hereford se negó a negociar con el Gobierno hasta que la concesión del English Heritage fuese restaurada; de hecho, todas las partes se reunieron el 2 de diciembre, pero se anunció de inmediato que, dada la falta de las 7 millones de libras para las reparaciones, la venta se llevaría a cabo.

Pocos días después, el benefactor millonario Paul Getty ofreció 1 millón de libras, y el National Heritage Memorial Fund 2 millones de libras, con el fin de crear una Fundación para mantener el Mappa Mundi en un edificio especial de nueva construcción; el Mappa Mundi fue retirado de la venta, y la ciudad se puso a trabajar en el asunto. El Mappa Mundi iba a permanecer en Hereford, pero iba a ser «vendido» por Guidehouse Securities a accionistas, para que cada accionista (hasta un número de 7.450) comprase una participación de 1.000 libras, a cambio de recibir una réplica de la mitad de tamaño del mapa. La emisión de acciones se lanzó en abril de 1989, y fue un fracaso inmediato; sólo se recibieron 992 solicitudes y, finalmente, todos esos cheques de 1.000 libras se tuvieron que devolver. El Deán y el Cabildo habían incurrido en una deuda de 100.000 libras. (De hecho, en noviembre unos 250 accionistas potenciales no habían reclamado sus reembolsos de 1.000 libras.)

Sin embargo, antes de esa fecha ya se veían las sombras de los acontecimientos venideros. A mediados de julio las etapas preliminares de las Cathedrals Measures habían sido aprobadas por el Sínodo General. El Cabildo en Hereford respaldó la creación de la Fundación para el Mappa Mundi, para la que Paul Getty y el National Heritage Memorial Fund ya habían prometido 3 millones de libras. Un año después se anunció que el nuevo edificio se comenzaría en 1991, pero sólo en marzo de 1992, se presentaron los planos a la Cathedrals Fabric Commission de Inglaterra, el nuevo organismo ejecutivo; la Comisión ejerció su autoridad, y rechazó los planos para la nueva biblioteca de estilo gótico que albergaría el Mappa. El arquitecto se sintió ultrajado, pero las negociaciones dieron finalmente como resultado un edificio que fue inaugurado en 1996; un año después ganó el premio al Edificio del Año por su reinterpretación del estilo gótico.

El Sínodo General de la Iglesia de Inglaterra se estableció en su forma actual en 1970; tiene 580 miembros, dividida en la House of Bishops (Cámara de Obispos), House of Clergy (Casa del Clero) y la House of Laity (Cámara de los Laicos), y está presidido por los dos Arzobispos. El Sínodo tiene el poder para elaborar estatutos de ley sobre cualquier asunto relativo a la Iglesia de Inglaterra —una vez que una «medida» (*measure*) ha sido aceptada por el Sínodo se presenta ante ambas Cámaras del Parlamento, que pueden pasarla (en cuyo caso se convierte en ley por defecto) o pueden debatirla, y aceptarla o rechazarla, pero no pueden hacer ninguna enmienda.

Fue la *Care of Cathedrals Measure* de 1990, la que sometió a los Deanes; se convirtió en ley en marzo de 1991. En resumen, el cuerpo administrativo de una iglesia catedral (es decir, en general, el Deán y el Cabildo) tienen que obtener permiso para llevar a cabo cualquier obra o realizar adiciones a la iglesia (o para cualquier construcción dentro del recinto que se considera como parte de la catedral) que afectase sus características arquitectónicas, arqueológicas, artísticas o históricas. Además, las propiedades que están en manos del Cabildo no pueden ser vendidas o alquiladas sin permiso. Las solicitudes hechas bajo la *Measure* se determinan finalmente por la Cathedrals Fabric Commission de Inglaterra, un cuerpo que consiste en un presidente, un vicepresidente y otros veintidós miembros nombrados en categorías prescritas, incluyendo un Obispo, al menos un Deán, dos arquitectos de la catedral, dos ingenieros o surveyors de construcción, un artista, y siete personas con conocimientos especializados en campos tales como la historia, la arqueología, la liturgia, archivos, etc. La Comisión se reúne una vez al mes para examinar las solicitudes de las catedrales.

Las solicitudes se presentan en realidad a través de los Fabric Advisory Committees (Comités Asesores de la Fábrica) creados en cada catedral; éstos son pequeños organismos que constan de tres a cinco miembros designados por el Deán y el Cabildo, y un

número igual nombrado por la Comisión principal. Los Deanes y sus Canónigos asisten a las reuniones de su Fabric Advisory Committee, y presentan y discuten sus propuestas, pero no pueden votar. Hay complejidades en el funcionamiento de la *Measure* —por ejemplo al definir exactamente el recinto de una catedral— y hay algunas tareas laboriosas, como la creación de un inventario de las (literalmente) miles de posesiones de una catedral, pero los procedimientos son sencillos. En resumen, si el Cabildo desea llevar a cabo una obra que afecte materialmente a los intereses arquitectónicos, arqueológicos, artísticos o históricos de la catedral, entonces, necesita la aprobación del Fabric Advisory Committee. Una alteración permanente a una catedral necesita la aprobación de la Comisión en pleno. En caso de duda, el comité local podría decidir remitir la pregunta a la Comisión; la Comisión podría considerar que las consecuencias litúrgicas y estéticas de la propuesta sean lo suficientemente serias para enviar una delegación a visitar la catedral, o podría pedir al Deán y al Presidente del Fabric Committee presentar su caso en Londres.

A cambio de esta cesión de autonomía por parte de los Cabildos, las catedrales pueden pedir subvenciones del Gobierno para ayudar en las reparaciones; grandes sumas fueron asignadas (por supuesto, reducidas después de unos pocos años —cinco años es más o menos el tiempo de vida de un gobierno), pero en realidad desde 1991 cualquier catedral con un digno y bien preparado programa de trabajo ha sido capaz de ponerlo en marcha con la ayuda de importantes subvenciones administradas a través del English Heritage.

En 1994 se publicaron Disposiciones Suplementarias para la *Measure* de 1990; estas disposiciones se refieren a los casos en que parezca que el Deán y el Cabildo estuvieran de alguna manera incumpliendo los reglamentos. En tales casos, el Obispo, que es, el *Visitor* de la Catedral, podría suspender los derechos del Cabildo, y podría tomar diversas acciones para, en efecto, decidir en cualquier conflicto. Pevsner y Betjeman habían fallecido hacía ya un decenio, pero el gobierno todavía era consciente de la anomalía que suponían las *Royal Peculiars*, que habían mantenido la exención eclesiástica y no estaban sujetas ni a los controles ejercidos por la propia Iglesia sobre las iglesias parroquiales, ni a la disposiciones de la *Care of Cathedrals Measure*. En diciembre de 1992 la Secretaría de Estado para el National Heritage definió de manera más precisa el alcance de la exención eclesiástica, indicando que se limitaría en el futuro «… a los edificios para los que (había) procedimientos internos aceptables para las obras pertinentes. El resto de edificios estaría sujeto a los controles normales de las autoridades de planificación locales.» Una Normativa complementaria especificaba que las propuestas de obras relevantes deben ser presentadas ante un órgano independiente (es decir, no uno controlado por el Deán y Cabildo), y reguló el funcionamiento de dicho órgano. (En este sentido, el *Fabric Committee* de una catedral es independiente.)

La declaración de 1992 fue seguida en julio de 1994 por una carta del Department of National Heritage a los *Royal Peculiars*, dando vías de actuación alternativas en el caso de que quisieran conservar la exención eclesiástica. Había, en efecto, tres posibilidades, de las cuales la primera sería renunciar al derecho a la exención:

1. aceptar estar sometido al consentimiento normal de los edificios protegidos registrados, ejercido por la Autoridad local;
2. someterse a la jurisdicción de la *Care of Cathedrals Measure* —es decir, a ser tratado como una catedral;
3. instituir algún método de control que satisfaga la Normativa del Gobierno.

Para Westminster, las tres posibilidades significaban cierta pérdida de control —extrema, si la Abadía iba a ser clasificada como un edificio protegido y tratado como un monumento civil, y aún severa si era declarada como una catedral con las decisiones locales tomadas por un pequeño Fabric Committee y debiendo presentar las cuestiones de peso al pleno, y la burocracia, de la Cathedrals Fabric Commission. El camino a seguir parecía estar en la creación de una Comisión «peculiar» para la Abadía, pero manteniendo el control lo más lejos posible de las manos del Deán y el Cabildo.

La Fabric Commission de la Abadía de Westminster aún está en evolución, pero ha estado en vigor desde 1997 como un cruce entre el Architectural Advisory Panel, creado por la Abadía en 1973 como respuesta al escándalo sobre el desmantelamiento de las techumbre, y la Cathedral Fabric Commission de Inglaterra creada en 1991. El número de miembros es muy parecido al de la Cathedrals Fabric Commission de Ingla-

terra, teniendo un presidente, un vicepresidente, y una veintena de otros miembros. Sin embargo, hay dos diferencias cruciales. La primera es que el Deán es Presidente, y los Canónigos representan cuatro de los veinte miembros; todos pueden votar, aunque en cualquier reunión los miembros no pertenecientes a la Abadía presentes, deben superar en número a los miembros del Cabildo. A pesar de este mantenimiento del control, pero con un mecanismo apropiado de aplicación, la Abadía sigue disfrutando de exención eclesiástica.

La segunda diferencia es que no existe un pequeño Fabric Committee, Comité de la Fábrica, entre el Deán y Cabildo y la Comisión, como lo hay para las catedrales. La nueva Comisión de la Abadía discute, en principio, tanto pequeños como grandes asuntos, pero, en cuanto a las catedrales, todas las decisiones deberán notificarse a las sociedades de servicio, de modo que puedan ofrecer comentarios. La Cathedrals Fabric Commission de Inglaterra tiene también que ser informada —la Abadía sufre las primeras sacudidas del control burocrático.

17
Bóvedas de madera

La techumbre de madera que cubre la cabecera o la nave de una gran iglesia presenta riesgo de incendio. Pueden aducirse varias razones para justificar la construcción de una bóveda de piedra debajo de un tejado de madera, pero es un hecho que ese tipo de bóvedas reducen el riesgo de destrucción de la iglesia. Pese a ello, existen numerosos ejemplos de bóvedas de madera que parecen imitar la construcción en piedra, como la de York Minster. En algunos casos, los historiadores de arquitectura desaprueban este tipo de imitaciones en madera de una forma que resulta de la construcción en piedra.

Las bóvedas de York salvan una luz de unos 15 m, mayor que los 12 m que, por término medio, tienen las grandes iglesias inglesas; se ha sugerido que, en el siglo XIV, los constructores de York no se atrevieron a realizar una bóveda de ese tamaño, a pesar de que casi un siglo antes se hubiesen ejecutado en Francia. Lo que está claro es que una bóveda de madera es mucho más económica que una de piedra. El peso del material es menor que una décima parte y los andamios necesarios pueden ser mucho más simples, o incluso no hacer falta. El empuje de una bóveda de madera también es menor que la décima parte del de la misma bóveda construida en piedra, con lo que puede que los arbotantes no sean necesarios como ocurre en York y en la bóveda de madera construida en el siglo XIII en St. Alban's.

En este artículo se repasa el comportamiento de las bóvedas góticas cuatripartitas de piedra, destacando que los nervios diagonales son el principal elemento estructural. En el caso de las bóvedas de madera, los nervios son también el elemento principal; los carpinteros medievales, lejos de imitar la construcción de fábrica, construyeron sus bóvedas expresando su correcto comportamiento estructural. Si entramos en el detalle, los plementos de ambos tipos de bóvedas transmite su peso a los nervios de forma distinta. La plementería de fábrica no puede resistir tracciones y funciona principalmente cómo una cáscara comprimida. Por el contrario, el entablado de la bóveda de madera puede trabajar a flexión, y no es preciso un funcionamiento en arco en los plementos.

La construcción de bóvedas nervadas es geométricamente flexible y, ya sea la plementería de piedra o de madera, se dan ejemplos que se apartan de la forma cuatripartita estricta.

Introducción

Parece que no hay duda que estaba previsto que York Minster se iba a abovedar en piedra (Hughes 1952–55). Hay indicios claros de que se había planeado la construcción de arbotantes, y el arranque de las bóvedas existente, por ejemplo las de la nave, está ejecutado en fábrica hasta el nivel de los enjarjes,

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original. «Timber vaults». En: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History.* M. Dunkeld et al. eds. (Cambridge: Construction History Society, 2006), vol. 2: 1569–1576. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

como ocurre en St. Alban's, figura 17.1 (Rogers 1931). Por encima de esta cota, toda la construcción es de madera, pese a que el observador puede creer que se trata de una típica bóveda de ligaduras de fábrica como las que se construyeron en Inglaterra en la primera mitad del siglo XIV. Es más, la fecha en que se ejecutó la primera de las bóvedas de madera de York, 1354, encaja estilísticamente en este periodo; se trata de un tipo de bóvedas que son en esencia cuatripartitas, pero están decoradas con complejas trazas estrelladas y retículas de ligaduras.

Las bóvedas de York y de St. Alban's no son ejemplos aislados de construcción en madera que «imita» la fábrica gótica, pero este tipo de bóvedas son raras por varias razones. Una bóveda de piedra puede evocar una sensación de resistencia, o al menos de permanencia, y Bond (1906) deplora el uso de la madera aparentando piedra: «Ya se trate de bóvedas o de semibóvedas ejecutadas en madera, son techumbres desagradables, pues resultan de realizar con un material unas formas surgidas por el empleo de otro de diferente naturaleza». Este punto de vista pudo haber sido compartido por los arquitectos de las grandes iglesias medievales, y por aquellos que las encargaron. Por otra parte, se sabía que una bóveda de piedra proporcionaba una protección notable frente al fuego. Las altas techumbres de madera presentan riesgo de incendio, y si se declarase un incendio, la bóveda de madera situada debajo proporcionaría una protección muy escasa, y esta es una razón práctica, no política o estética, para preferir la construcción en piedra.

La alta techumbre de madera situada sobre las bóvedas garantiza la protección frente a la lluvia; por el contrario, la bóveda de fábrica, agrietada o no (que generalmente lo estará), es bastante permeable. Por tanto, el empleo de la doble cubierta es simbiótico; la techumbre de madera protege las bóvedas de fábrica

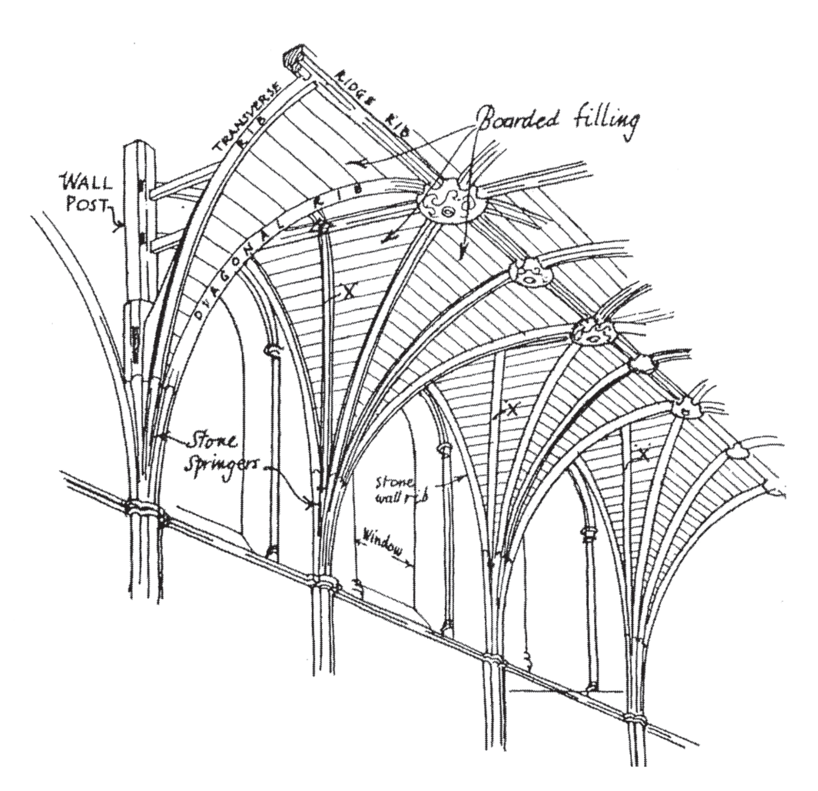


Figura 17.1
Bóveda de madera (1290) del presbiterio de St. Alban's (Rogers 1931)

de la lluvia y las bóvedas protegen la techumbre frente al fuego. De hecho, el fuego destruyó varias bóvedas de madera; la bóveda de la nave de York de 1354 ardió en el incendio de 1840 y lo que se puede contemplar hoy es una reconstrucción Victoriana. Muchas de las bóvedas que se conservan son sustituciones, aunque la bóveda del presbiterio de St. Alban's es la original, de finales del siglo XIII.

Mecánica de las bóvedas de fábrica

La bóveda de St. Alban's es perfectamente cuatripartita; con una luz de 11 m es anterior y más pequeña que la de York que alcanza 15 m. (Las dimensiones son aproximadas y únicamente se mencionan para poder compararlas; la luz estándar a ejes de columnas es mayor que la luz de la bóveda entre los muros del cuerpo de luces.) En la figura 17.2 (Fitchen 1961) se explica la geometría básica de una bóveda cuatripartita. Puede considerarse que la «cáscara» que se muestra en la figura tiene un espesor muy pequeño, y de hecho este es el modelo que emplearía un ingeniero moderno al aplicar el «análisis de membrana» para calcular las tensiones presentes en las superficies (debidas al peso propio).

Las ecuaciones que determinan las tensiones dependen de la curvatura de la cáscara. En términos matemáticos, las superficies representadas en al figura 17.2 son desarrollables. Esto quiere decir que se puede realizar una maqueta con papel recortado con la forma adecuada, curvado y encolado en los «pliegues» (el espinazo y los nervios diagonales). Por tanto, cada una de las superficies de la bóveda, los plementos, es plana en una dirección y curva en la dirección perpendicular. Por el contrario, una cúpula o una bóveda de abanico no se puede construir empleando papel recortado (a no ser que se le estire). Cualquier superficie se puede describir en términos de dos curvaturas; dos líneas (curvas) dibujadas sobre la superficie y cortandose en ángulo recto tendrán, en el punto de intersección, dos valores diferentes de la curvatura. En el caso de una cúpula, la curvatura de ambas será cóncava vista de abajo (en general, los valores de las curvaturas serán diferentes, excepto en el caso de una cúpula esférica), y el producto de ambas curvaturas, conocido como curvatura gaussiana, será positivo. En una bóveda de abanico una de las curvaturas es convexa y la otra cóncava, con lo que la curvatura gaussiana es negativa. El signo de la curvatura gaussiana es determinante a la hora de resolver las ecuaciones que describen las cáscaras.

El signo de la curvatura gaussiana afecta no sólo a las matemáticas: tiene consecuencias constructivas importantes. Por ejemplo, tal como demostró Brunelleschi, se puede construir una cúpula prácticamente

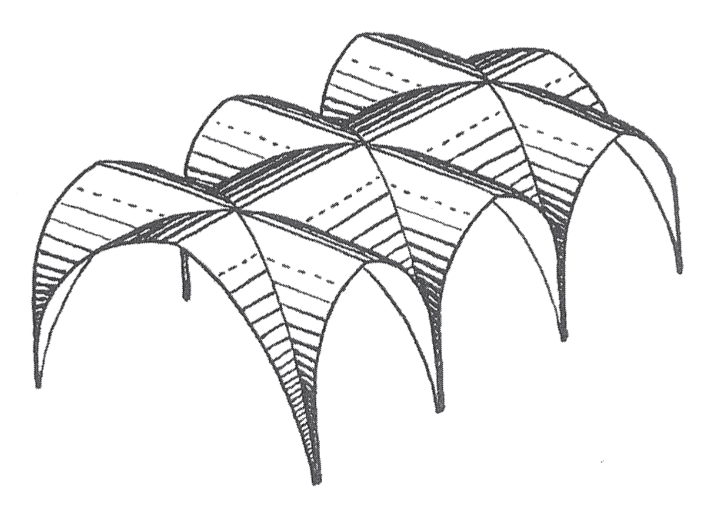


Figura 17.2
"Cáscara" esquemática de una bóveda cuatripartita (Fitchen 1961)

sin cimbras; un anillo horizontal de fábrica es autoportante, y sirve de base para la construcción del siguiente. La cúpula se puede terminar en cualquier punto, dejando abierto un gran óculo, como ocurre en la cúpula interior de las tres de San Pablo proyectadas por Wren, o en la del Panteón (de hormigón). Por el contrario, para construir una bóveda de abanico (como ocurre en el arco bidimensional) necesita una cimbra hasta que se coloca la «clave» final; sólo entonces se puede descimbrar. (No obstante, es cierto que en las etapas finales de la construcción de una bóveda de abanico, la omisión de los tímpanos que hacen de clave no provocará el colapso de la bóveda; se produce un mecanismo local de cúpula que asegura la estabilidad.) Es muy probable que el elevado coste que supone construir grandes bóvedas de abanico, tanto para el corte de piedra como para andamios, explique por qué sólo se edificaron durante una década a comienzos del siglo XVI.

Como se ha dicho, las superficies de la bóveda cuatripartita idealizada tienen en una dirección curvatura cero y, por tanto, la curvatura gaussiana es también cero. De nuevo, esto tiene importantes consecuencias en la solución de las ecuaciones. La principal es que las tensiones se pueden transmitir sin variación en las direcciones planas, indicadas por líneas rectas en la figura 17.2. Así, en los bordes de las bóvedas transversales (norte-sur), por ejemplo, no puede haber cargas aplicadas, y, en cualquier caso, habrá grietas de «Sabouret», realmente o en potencia, que separan totalmente la bóveda del arco formero de la ventana. Por tanto, en teoría, las superficies que se muestran en al figura 17.2 no tendrán tensiones en las direcciones planas; todas las fuerzas seguirán la trayectoria curva de los plementos de la bóveda hasta llegar a los nervios.

En consecuencia, la teoría simple de la membrana apoya la hipótesis de Pol Abraham sobre el modo en que se transmiten las fuerzas en una bóveda (Abraham 1934). Abraham imaginó una bola rodando hacia abajo sobre las superficies: la trayectoria de la bola indica la dirección de las fuerzas. Cuando la bola llega a la arista rueda sobre ella hasta que alcanza el sistema de contrarresto. La teoría de la membrana predice un aumento brusco de las tensiones (en comparación con los valores medios en los plementos) en la zona de la arista, pero los valores siguen siendo bajos comparados incluso con la débil fábrica que forma los plementos. El esqueleto formado por los dos nervios diagonales emerge como la estructura que soporta el peso de la plementería, y transmite ese peso y los empujes correspondientes a los arbotantes (si existen) y estribos exteriores.

Esta imagen del sistema de fuerzas es esencialmente correcta, incluso aunque la bóveda se ha idealizado para simplificar las matemáticas. Un plemento real de una bóveda tendrá un espesor finito, todavía pequeño en comparación con las dimensiones principales, pero no despreciable. De forma crucial, aunque las fuerzas tienen que permanecer entre las dos superficies que definen la plementería, ya no están constreñidas por la camisa de fuerza de una forma matemática precisa; pueden apartarse ligeramente de la geometría perfecta (y, de hecho, la geometría de la bóveda construida no será perfecta). En dos dimensiones, Robert Hooke encontró la forma perfecta del arco sometido a unas cargas determinadas como la de un hilo flexible que soportase esos mismos pesos, pero invertido. Un arco circular con un espesor razonable es estable porque la cadena de Hooke, que no es circular, puede estar contenida entre su intradós y trasdós. Del mismo modo, en una bóveda, las trayectorias de fuerzas no necesitan seguir el trazado de la superficie media de la bóveda idealizada. Es más, la bóveda puede estar ligeramente curvada en la dirección que se ha supuesto «plana», y las fuerzas ya no tienen que ser cero en direcciones perpendiculares a la de máxima curvatura. No obstante, en una bóveda cuatripartita, las fuerzas principales siguen las trayectorias de las bolas rodantes de Pol Abraham, y los constructores góticos comprendían cabalmente (aunque no matemáticamente) la mecánica de estas bóvedas.

El nervio

Las bóvedas nervadas son anteriores al gótico pero, ciertamente, se ha considerado el nervio como una de las características definitorias de la arquitectura eclesiástica posterior a 1140 (iglesia abacial de St. Denis). Situado justo debajo de la arista, sirve como refuerzo de la intersección de dos superficies. No es absolutamente necesario para asegurar la estabilidad de la bóveda, pero su presencia reduce las altas tensiones que se producen en las intersecciones de los plementos; se puede imaginar que los nervios diagonales funcionan como dos arcos que soportan todo el peso de la plementería.

El nervio tiene, además, otras funciones. Visualmente, permite tapar la difícil intersección de los plementos en la arista. De nuevo visualmente, sirve, arquitectónicamente, para articular los tramos de la nave o la cabecera. Pero su cometido principal es recoger las fuerzas sin equilibrar que se generan cuando dos cáscaras de fábrica se intersecan produciéndose un cambio brusco en su dirección. Por el contrario, el nervio situado sobre una superficie continua, un tercelete o una ligadura, es en general decorativo; este tipo de nervio no recibe ninguna fuerza de los plementos de bóveda que parece soportar. Análogamente, el nervio horizontal del espinazo (que puede no existir) cargará sobre los plementos de la bóveda pero no contribuirá a la resistencia de la fábrica. Asimismo, el nervio transversal (que igualmente puede omitirse) define los tramos de la bóveda pero resiste poco más que su propio peso.

La mecánica estructural intrínseca de la bóveda, que se hace evidente en el nervio, permitió a los maestros góticos construir de modo económico. Para abovedar con fábrica un tramo de nave de 12 × 6 m (dimensión habitual en numerosas catedrales inglesas), se construían en primer lugar los dos nervios portantes diagonales; para ello era necesario emplear cimbras que soportasen los arcos, pero el andamiaje era mucho menor que el necesario para construir las bóvedas de arista románicas. Una vez que los nervios diagonales estaban terminados se podía construir la plementería de modo rápido y sencillo sin apenas emplear apoyos intermedios. Se había desarrollado un sistema racional y eficaz para construir las altas bóvedas de fábrica.

Arquitectónicamente, el sistema era asimismo muy flexible: no era necesario que los tramos fuesen rectangulares, pudiendo tener forma trapezoidal, por ejemplo para adaptarse a un ábside semicircular. Cuando era necesario, más de cuatro nervios portantes podían acometer a la clave central de un capilla absidal, y Villard, en su álbum de mediados del siglo XIII, presenta esquemas de ambas soluciones. El constructor gótico sabía que cualquier disposición razonable de los nervios iba a «funcionar». Un caso extremo es el de las bóvedas «locas» de la cabecera de St. Hugh en la catedral de Lincoln (ca. 1200), cuyo esquema se representa en la figura 17.3. Puede verse que, de hecho, los cuatro nervios «diagonales» no forman en realidad diagonales que se cruzan en el centro del tramo sino que se dirigen a otros puntos espaciados en el tramo; los dos nervios de uno de los lados de la cabecera se encuentran con un sólo nervio del otro lado. La función de este nervio, situado sobre una superficie de curvatura continua (plana) es la de resistir los empujes que producen los otros dos nervios con los que se une.

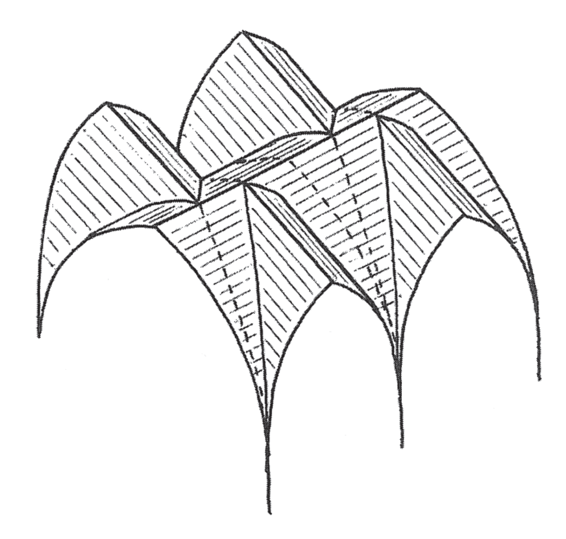


Figura 17.3
Las bóvedas «locas» de la catedral de Lincoln (ca. 1200)

Mecánica de las bóvedas de madera

Como en York, estaba previsto que las bóvedas de St. Alban's (ca.1290) se ejecutasen de fábrica; los arranques de piedra, figura 17.1, estaban ya terminados. No hubiera habido ningún problema constructivo en seguir el proyecto original, pero la bóveda de madera era mucho más barata. Habría sido necesario traer piedra de la cantera (gran parte de la iglesia abacial románica se había construido con material reciclado, ladrillos romanos y cascote), y se habrían tenido que construir costosas cimbras para soportar la nueva obra de cantería. En lugar de eso, los elementos más pesados de la bóveda de madera de la figura 17.1, los cuatro nervios diagonales de unos 6 m de longitud, pesan cada uno unos 600 kg, y pudieron levantarse con facilidad para juntarse en la clave central de cada tramo (de hecho, se unen al nervio del espinazo, y la unión está tapada por una clave hueca). Los nervios

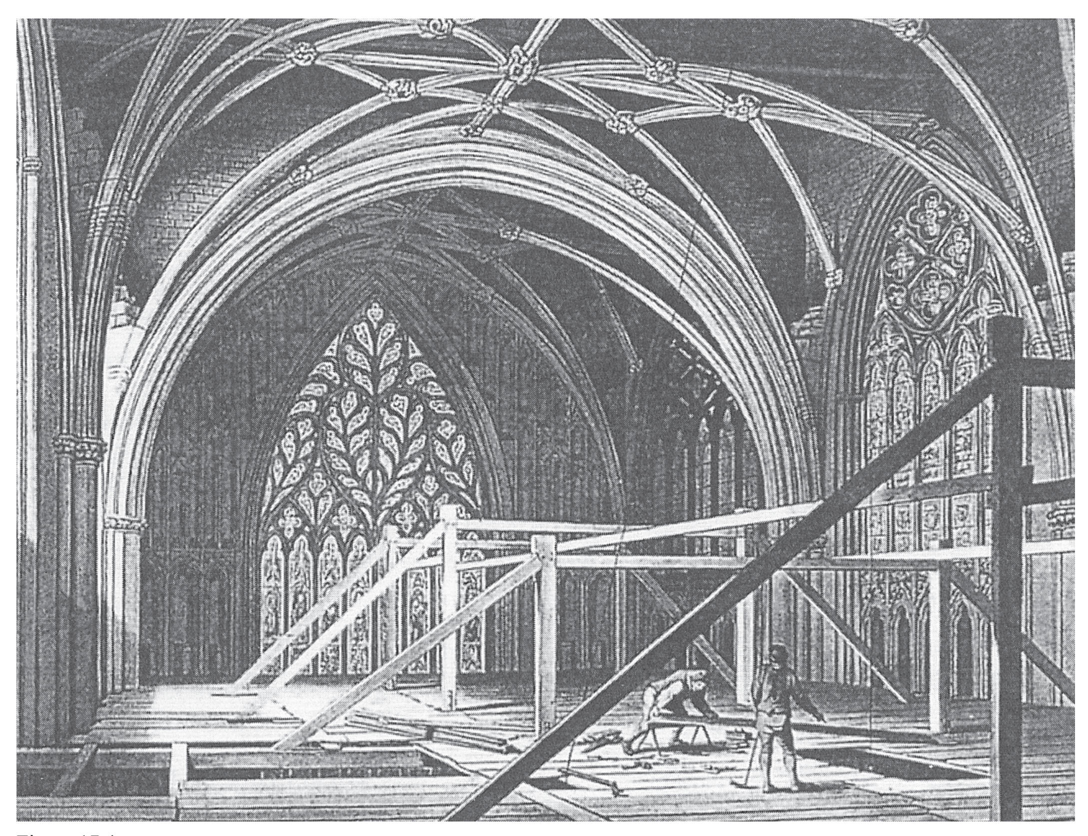


Figura 17.4
York Minster: reparación de la bóveda de la nave, Joseph Halfpenny (Brown 2003)

transversales de cada tramo (con una clave más pequeña tapando la unión) completan la estructura autoportante de esqueleto; terminar los paños clavando tablas de 18 mm de espesor fue tarea sencilla; con posterioridad se pudieron decorar los paños. Los nervios intermedios marcados con una *X* en al figura 17.1 se añadieron un siglo y medio después durante unas obras de reparación de las bóvedas; con estos apoyos intermedios se reduce a la mitad la luz del entablado necesario para realizar los paños de las bóvedas transversales.

La bóveda de madera no está «imitando» un modelo de fábrica. Más bien expone con gran claridad la forma en que se debe construir la bóveda: la función se expresa en la estructura, ya sea el material piedra o madera. Las fuerzas estructurales debidas al peso propio del material se recogen en los nervios diagonales, y se transmiten a través de los arranques al sistema de contrarresto; como la bóveda de madera puede pesar menos de la décima parte de la bóveda de piedra, el empuje de la bóveda de madera será también menor de la décima parte que el de la bóveda de piedra correspondiente, y el sistema de contrarresto no necesitará tener arbotantes por encima de las naves laterales.

Todo el sistema de abovedamiento es, en términos estructurales, muy hiperestático: hay muchas trayectorias de cargas distintas que pueden asegurar la estabilidad. No es posible afirmar que una determinada distribución de fuerzas está realmente presente en la bóveda (ni en cualquier otra estructura), pero el analista puede al menos proponer patrones

de comportamiento razonables. La bola rodante de Pol Abraham da una buena imagen del modo en que las fuerzas se transmiten por un plemento continuo de fábrica; los cañones (apuntados) de una bóveda cuatripartita típica funcionan como arcos simples apoyados en los nervios diagonales. Sin embargo, este sistema de fuerzas no es razonable para una bóveda de madera. No podemos suponer que las tablas están perfectamente en contacto unas con otras, y por lo tanto no hay ninguna trayectoria de cargas pasando de tabla a tabla por la línea de máxima pendiente. En su lugar, las tablas deben trabajar a flexión, como una viga corta apoyada en los elementos principales de madera; la madera resiste bien flexiones que producirían daños a una obra de piedra y mortero. Así, en las bóvedas de fábrica podemos imaginar que las cargas se desplazan por las pendientes de los paños hasta los nervios diagonales, mientras que las tablas de madera discurren horizontalmente entre los nervios. En ambos casos, sin embargo, las cargas gravitatorias son soportadas por los nervios diagonales.

Como ocurre con las bóvedas nervadas de fábrica, el proyectista en madera goza de una gran libertad arquitectónica. Por ejemplo, en el claustro de la catedral de Lincoln, el ancho de la entrada a la casa capitular no coincide con el del tramo correspondiente del claustro (Howard y Crossley 1917). Por esa razón, los nervios de ese tramo no coinciden con los de una bóveda cuatripartita regular, y hace falta una configuración más complicada, con dos nervios en uno de los lados que se unen a un único nervio por el otro, como ocurre en las bóvedas «locas» de esa misma catedral, figura 17.3.

Envoi

A pesar de que la luz «estándar» de las naves de las catedrales inglesas más importantes está en torno a 12 m, los 15 m de la nave de York no hubieran inquietado a los canteros del siglo XIV. La Lady Chapel (1340) de la catedral de Ely tiene casi exactamente este tamaño, y otras bóvedas de fábrica de 15 m o más ya existían en Francia en, por ejemplo, Amiens, Beauvais y Rheims. Más tarde, se alcanzaron en Albi los 19 m, 20 m en Palma de Mallorca y 23 m en Gerona. Para luces todavía mayores la solución fue la cúpula de fábrica: 33 m en Santa Sofía, 34 m en San Pablo, 42 m en San Pedro de Roma y en Florencia, y 43 m en el Panteón.

Es posible que en 1340 los constructores de Ely tuvieran ciertas reservas a la hora de construir una bóveda de piedra de 24 m sobre el octógono del crucero, y, finalmente, la linterna se construyó en madera. Sin embargo, tanto en York como en St. Alban's fue el coste más que la precaución lo que determinó que se emplease madera. En la figura 17.4 se muestra la bóveda medieval de York mientras se estaba restaurando en 1796, antes del incendio destructivo de 1840. La estructura de esqueleto principal está parcialmente enmascarada por la proliferación de nervios, pero estos nervios forman un entramado eficaz sobre cuyo trasdós se puede clavar la cáscara de madera.

18

Hooke y Bedlam

Los diarios de Robert Hooke[1] son parcos al registrar los acontecimientos cotidianos: una sola palabra es suficiente para descalificar a sus colegas; se extiende más en las descripciones de nuevos temas científicos de su interés, tanto de astronomía como de física, química o biología; es minucioso en el registro de sus hallazgos y compras en librerías de segunda mano; y es obsesivo al describir su estado de salud —apetito, horas de sueño, experiencias con nuevos medicamentos o consumo de chocolate. A pesar de su laconismo, las notas de Hooke sobre los efectos de remedios de curanderos son auténticos registros de laboratorio de los experimentos que realizaba con su propio cuerpo, unas notas que, de este modo, podían ser consultadas posteriormente.[2] Sus actividades cotidianas, a pesar de ser muy variadas, constituían el tema habitual de sus notas y no parece que necesitasen de mucha explicación: aparecen referencias casi diarias del tipo «con sir Ch. Wren», a veces especificando el lugar («en un café», «en San Pablo»), pero a menudo sin dar indicios de las razones de la reunión. (Hooke normalmente se refiere a Wren como sir Ch. Wren; para otras personas, aunque fuesen distinguidas, utiliza solo el apellido.)

Las reuniones, muy frecuentes, que mantenían Hooke y Wren (además de su asistencia a la Royal Society[3]) estaban relacionadas con sus trabajos de construcción en los que Wren era, por supuesto, el responsable principal. Esta relación profesional se refleja en cierto modo en sus nombramientos para la reconstrucción de San Pablo: Wren como *surveyor* (director) y Hooke como *assistant surveyor* (ayudante del director). Sin embargo, Hooke era, por mérito propio, *surveyor for the City* y responsable de la aprobación de toda la reconstrucción emprendida tras el Gran Incendio de 1666. En esta reconstrucción se incluían las 51 iglesias de Wren;[4] de hecho, la mayoría de los dibujos realizados para los edificios de la City fueron aprobados por ambos, Hooke y Wren. Hoy se sabe que dos iglesias «de Wren», St. Edmund the King y St. Benet Paul's Wharf, fueron proyectadas únicamente por Hooke y que su contribución fue decisiva en al menos otras tres (St. Margaret Lothbury, St. Martin Ludgate y St. Peter en Cornhill).[5] Wren, con toda justicia, eclipsó a Hooke como arquitecto, del mismo modo que Newton lo hizo, y también justamente, en su faceta de científico. Pero es un hecho que Newton había adquirido sus conocimientos sobre capas finas de colores de Hooke,[6] aunque los anillos de colores del famoso experimento se conocen como «anillos de Newton», —del mismo modo que el Monumento (la Columna de Fish Hill que conmemora el Gran Incendio), que se atribuye confiadamente a Wren, fue proyectado por Hooke.

Lamentablemente, casi todas las obras reconocidas de Hooke como arquitecto en Londres (exceptuando el Monumento y las dos iglesias «de Wren») han

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Hooke and Bedlam». En: *Robert Hooke. Tercentennial Studies*, editado por M. Cooper y M. Hunter. (Aldershot: Ashgate, 2006): 153–164.Traducción de Rosa Ana Guerra Pestonit.

desaparecido, bien debido a incendios, o por haber sido demolidas para su sustitución. Uno de sus edificios más importantes del período comprendido entre 1674 y 1676 fue el nuevo hospital para enfermos mentales de Bethlehem (o Bethlem, o Bedlam). Durante ese período sus diarios registran cerca de 100 visitas a Bedlam: cada tres o cuatro días estaba «con el señor Hoskins en Bedlam», «en Bridewell sobre Bedlam», «en Bethlem con el Comité» o, simplemente, «Bedlam». A pesar de su parquedad, el conjunto de estas referencias permiten reconstruir una imagen clara de cómo se llevaba a cabo la actividad constructiva a finales del siglo XVII y de cómo se relacionaba el arquitecto con sus clientes y contratistas.

Bedlam

El priorato de St. Mary of Bethlehem fue fundado en Bishopsgate en 1247, fuera de las murallas de la ciudad, en el lugar que hoy ocupa la Estación de la calle Liverpool. Aparece citado por primera vez como hospital en 1329 y consta que en 1403 se ocupaba del cuidado de personas dementes. Enrique VIII disolvió la orden religiosa, y el gobierno del hospital de Bethlem se transfirió a la City de Londres en 1557. Diez años más tarde, Bethlem se unió con Bridewell (el Reformatorio) bajo una misma dirección.[7]

El hospital de Bethlem solo podía albergar a 25 pacientes. Resultaba pequeño y sus edificios se encontraba arruinados. En 1673 el comité directivo decidió que Bedlam necesitaba un nuevo edificio y el proyecto de Hooke para 120 pacientes se construyó en los terrenos contiguos de Moorfields, también fuera de las murallas de la City (y hoy al lado norte de la Muralla de Londres). Este edificio, el de Hooke, un siglo más tarde, volvió a resultar pequeño y a deteriorarse; fue demolido y un tercer hospital se inauguró en 1815 en St. Georges's Fields, en Southwark. El nuevo edificio reprodujo la disposición que Hooke había adoptado en Moorfields: constaba de un bloque central de aspecto monumental y dos largas alas destinadas a los pacientes (cuyo número se ampliaba ahora a 200).

Hacia 1930 en Gran Bretaña había alrededor de 100 hospitales para atender a enfermos mentales, que se emplazaban normalmente en áreas rurales. En cambio, el tercer Bethlem de Southwark había quedado rodeado por la expansión urbana de Londres; se construyó un cuarto hospital en Beckenham y fue allí donde se celebraron los actos del 700 aniversario en 1947. Las alas del hospital de Southwark se demolieron y el pabellón central es actualmente el Museo Imperial de la Guerra.

Mientras tanto, el hospital de Maudsley se había fundado en 1923 en Camberwell como una institución modesta orientada fundamentalmente a la investigación. Maudsley y Bethlem se fusionaron en 1948 para constituir un hospital de formación de posgraduados integrado en el recién creado Servicio Nacional de Salud (NHS). Previamente a la fusión, este centro de formación se había incorporado a la Universidad de Londres, rebautizado como Instituto de Psiquiatría; 20 años más tarde, en 1967, el Instituto de Psiquiatría se trasladó a un nuevo edificio anexo al del hospital de Maudsley en Camberwell. Maudsley se hizo cargo de la gestión de la atención mental en todo el distrito en 1991, y el hospital Real de Bethlem y el de Maudsley se convirtieron en una Fundación del NHS en 1994. Finalmente, tras una nueva reorganización del NHS en 1999, los hospitales de Bethlem y Maudsley pasaron a formar parte de un organismo de salud mental mayor: la Fundación de South London y Maudsley, del NHS. A pesar de que el hospital de Bethlem de Beckenham ha mantenido su nombre original, este no aparece en el membrete del hospital, que muestra el deprimente acrónimo SLAM.[8]

Moorfields

El martes 14 de abril de 1674 Hooke anota en su diario:

> En Belinsgate, Mr. Hawes. Con Dr. Allen en Bedlam. Visto Morefields para nuevo Bedlam. Redacto informe para él. Con sir W. Turner. Empezado nuevo Diseño. DH. Encuentro Esq. Warder en el Guardarropa y diseño escaleras, ventanas, puertas, etc. Compro al lado del Blew Anchor de Duck Lane, *Clusis rariorum plantarun historia* 6 chelines y *ejusdem exoticorum libri* 10 chelines, *cun observationibus* P. Belloni 4 chelines, de Cardanus *de proportionibus* y el Álgebra 2 chelines. Le paga Harry. En Garaways. Bebo té, lo que me quita todo el sueño y me incomoda mucho. Duermo destemplado, sudo mucho. Pago a Harry. Primer día de Bette Orchard. En Garaways, Colwall, Wild, Aubery, Collins, etc. Collins y su vida, etc.[9]

Esta es la nota completa y registra un día típico de Hooke —otros días anota actividades científicas. Garaways era un conocido café en Change Alley, en Cornhill. Hooke a veces se repite y, probablemente, solo acudió una vez a Garaways el 14 de abril, donde se encontró con sus amigos. Compró libros —las cantidades son considerables y anota cuidadosamente los precios. (Otros días anota «no pagados».) La palabra «diseñar» (*design*) abarca un amplio rango de actividades y, probablemente, dibujó bocetos para las escaleras y demás elementos para el Esquire Warder. El «nuevo Diseño» de Bedlam, sin embargo, indica que asume el encargo como arquitecto para el nuevo hospital. DH = *dined home*, cena en casa. Betty Orchard era la nueva sirvienta, quien rompió un vaso el 22 de julio, pero acudió a la cama de Hooke el 26 de julio (Hooke anota el episodio con el símbolo que utiliza para sus encuentros sexuales: el signo zodiacal de Piscis); el 15 de agosto «Betty resultó intolerablemente descuidada» y fue despedida el 30 de septiembre.

Sir William Turner había sido alcalde de Londres (1668-69) y desde 1669 hasta su muerte en 1693 fue presidente (de los patronos) de Bridewell y Bethlem. El Dr. Thomas Allen fue el médico asociado, no residente, en Bethlem entre 1667 y 1684. Hooke tuvo que haber recibido el encargo del proyecto del nuevo hospital en Moorfields antes del 14 de abril de 1674. Ya estaba entonces trabajando en Bridewell, que había sido destruido por el Gran Incendio, y el 25 de junio de 1674 Hooke mostró «a sir W. Turner Diseño de Bridewell» para una posible reconstrucción. El 3 de julio estaba «en Bridewell por Bedlam», y el 10 de julio, «en Davys por el módulo de Bedlam». «Módulo», *module*, puede significar una maqueta, un dibujo del edificio proyectado o, simplemente, la definición de unas condiciones. En cualquier caso, al día siguiente, 11 de julio, Hooke escribe «en Bridewell aceptaron el módulo para Bedlam».

Por lo tanto se aprueban las condiciones y el 28 de septiembre Hooke parte «para Morefield por Bethlehem con sir W. Turner, sir Th. Player, etc.». (Sir Thomas Player era el chambelán de Londres.) El 12 de octubre hubo un «acuerdo sobre el hospital de Bethlem» y una semana más tarde, Hooke se encontraba «con los patronos de Bedlam». Las obras comenzaron a final de mes; el 29 de octubre Hooke estaba «con Mr. Fitch en Morefields … empezando el muro de Bethlem»; al día siguiente se encontraba de nuevo «con Mr. Fitch en Morefields»; el 2 de noviembre estaba «con Mr. Mosier y Mr. Fitch en Morefields»; el 3 de noviembre, «en Bethlem»; y el 6 de noviembre, «en Morefeilds con Scarborough».

John Scarborough fue el encargado de las obras (*Clerk of the Works*) del palacio de Greenwich en 1681 y posteriormente ocupó otros puestos importantes; formó parte del estudio de Wren, y ambos, Wren y Hooke, recurrieron a sus servicios para realizar las mediciones, —es decir, como aparejador (quantity surveyor). Los hermanos John y Thomas Fitch eran maestros constructores en el sentido medieval del término; se trataba de albañiles muy expertos, que también podían trabajar como arquitectos redactando proyectos. En 1674 Thomas Fitch había completado la obra de apertura y encauzamiento del canal del Fleet (Hooke estuvo involucrado en el proyecto); Thomas fue nombrado caballero en 1679 y baronet en 1688. Hooke hacía varios años que conocía a los hermanos y en octubre/noviembre de 1674 John Fitch fue contratado para construir el muro del nuevo Bethlem, —posiblemente el muro de cierre. En noviembre/diciembre Hooke anota encuentros con Fitch y visitas a Moorfields.

El 6 de enero de 1675 Hooke discutió con sir Thomas Player y el tesorero de Bethlem (Ducane —o Du Cane, Du Quesne) la disposición en el solar del nuevo hospital. Hooke mantuvo varios encuentros a lo largo del mes con el tesorero y el Comité, y hacia el 25 de enero había completado el proyecto final: «Enviada propuesta sobre edificio Bethlehem»; el 28 de enero estaba «con el tesorero Ducanes. Presento Diseño. Gusta». Recibió la aprobación formal, y el 3 de febrero «Fitch tomó la obra de Bethlem». El 5 de febrero Hooke «empieza Bedlam en Morefields».

Por lo tanto John Fitch fue nombrado «contratista general» de la obra, posiblemente con una especial responsabilidad en las fábricas de ladrillo (y en la obra de fábrica en general). El paso siguiente fue la elaboración de los presupuestos, y el 15 de febrero Hooke dice haber «acabado el presupuesto de Bedlam. Enviado al Tesorero». Entre tanto, cinco días antes, Hooke había estado «en Bethlem con el Comité. Acuerdo sobre las instrucciones a los carpinteros y sobre las pilas de maderos de abeto amarillo con escuadrías de 12 y 14 pulgadas a 35 chelines por carga». El 2 de marzo «Fitch empezó la entibación … de los cimientos».

El emplazamiento del nuevo Bethlem estaba situado en el antiguo foso que rodeaba la muralla de la

City, por lo que tuvo que ser esencial construir unos cimientos firmes en un terreno de tan baja calidad. La palabra «pila» (*pile*), sin embargo, es ambigua. Estrictamente se trata de un madero vertical («cuadrado, de 12 pulgadas de lado») introducido a una profundidad suficiente para proporcionar un soporte firme a la base de los muros, un pilote. Pero también puede significar simplemente un montón de material: un método habitual de proporcionar una buena base a los muros consistía en disponer maderos horizontalmente, rellenar los intersticios con mampostería y colocar una tablazón por encima creando una superficie nivelada para los muros de ladrillo. Ciento veinticinco años más tarde, en 1800, el informe de un arquitecto para los patronos consideraba el edificio peligrosamente inseguro (lo que condujo a su demolición y al traslado a Southwark en 1815). El informe indicaba que los muros no se habían asentado sobre pilotes, y que las fábricas de ladrillo simplemente se habían dispuesto sobre la superficie del terreno, a unas pocas pulgadas por debajo del suelo.

Durante los 18 meses siguientes, desde marzo de 1675 hasta octubre de 1676, Hooke visitó Moorfields, al menos semanalmente, para ver a sir William Turner o al tesorero Ducane y para entrevistarse con el Comité. Con la entibación de los cimientos iniciada, el 5 de marzo de 1675 estaba «en el hospital de Bethlem. Recibida propuesta de constructores», y el 8 de marzo «con Ducane. Comité acuerda con Waters, Hutchinson y Cartwright āā ⅓». Se trataba de constructores independientes —Cartwright, por ejemplo, era el principal contratista al que Wren recurría frecuentemente— a los que parece que el Comité contrata directamente un tercio de la obra a cada uno. El 18 de marzo Hooke estaba «en Morefields. Instrucciones a Cartwright y Fitch».

Los detalles se iban definiendo a medida que las obras avanzaban: el 9 de abril «con el Comité de Bedlam que, después de algunas discusiones deja en mis manos el asunto de las escaleras. Prometo que gratis». (Esta es la primera mención del asunto de la remuneración de Hooke como arquitecto del hospital.) El 9 de junio «acuerdo sobre la conducción del saneamiento, la ventana bajo la galería, los paneles de roble de la puerta, etc.» y el 1 de julio «acordamos sobre la pizarra del tejado». El 12 de julio se incorporaron nuevos contratistas: «El Comité de Bedlam acuerda con Ain y Gee para cubrir Bedlam con pizarra de Plinmouth clavada sobre rastreles con clavos de 4d, 2 en cada rastrel, de más de 5 pulgadas y de 3 doble que es 2 cubierto a 26 chelines 6d. por cuadrado».

El 19 de julio el Comité ordenó que se revistiesen completamente con piedra los muros de ladrillo de la parte central, y el 7 de septiembre «acordaron con Lucarnes 12 ménsulas labradas, linternas y pisos», y en efecto, se construyeron doce buhardillas en las cubiertas inclinadas del hospital. El 20 de octubre se llegó a un acuerdo con los vidrieros sobre la calidad y el tamaño de los vidrios y sobre el peso del plomo. Las obras continuaron durante el invierno, y se siguieron tomando decisiones sobre chimeneas, casas de paja, una torre, etc. Las obras parecen encontrarse prácticamente acabadas hacia abril/mayo de 1676 y se anotan visitas de Scarborough (el encargado de las mediciones). El comité de las obras continúa reuniéndose durante el verano y las facturas de los contratistas se revisan en al menos ocho ocasiones en octubre. El 2 de octubre Hooke anotó «revisadas facturas constructores de Bedlam», y cuatro días más tarde se encontraba «con el Tesorero valorando las facturas de los carpinteros»; finalmente, entre el 24 y el 28 de octubre se celebraron «varias reuniones en Bedlam para revisar facturas en las que las cosas fueron según mis precios».

Al final del año Hooke cuenta su dinero y el 31 de diciembre anota la extraordinaria suma de 1.300 £, debidas principalmente a honorarios profesionales y a salarios impagados; en este total se incluyen 200 £ «de la construcción y supervisión del hospital de Bedlam». El 11 de enero de 1677 «Scarborow aquí. En Bedlam, Mr. Chase, Whistler, Pilkington, Crisps, Spires, Goald, Stanly, Chadwick y Ducane, 2 perros presbiterianos, Botteler, (Haines ausente), Mr. Fitch. Sobre la discusión de mi asunto. Votaron que debería recibir 300 £ ó 250 £ y así lo apunto». El nuevo edificio había captado gran interés público y el 18 de enero Hooke ha «comprometido que Stevenson pintará Bedlam y Logan lo tallará». El 23 de febrero Hooke dice haber «recibido por Scarborough orden de 200 £ por Bedlam», pero el 6 de marzo «con Ducanes. Me aplaza las 200 £». De nuevo, el 23 de marzo, «hablo con el tesorero del dinero. Aplazado». Finalmente, el 1 de junio, «con Mr. Ducanes, tesorero de Bridewells, le entrego recibo por 50 £, de las que recibí 20 chelines en peniques, 1 guinea, el resto en dinero, doy a su hombre 2s. 6d., parte de las 200 £ asignadas por el Hospital». El 3 de agosto «con Ducanes recibidas

50 £ por la garantía de Bedlam, que con las anteriores 50 suman 100 £, quedando pendientes otras 100», y el 4 de septiembre «con el tesorero Ducane, me niega el dinero con nuevos aplazamientos». El 22 de diciembre Hooke recibió una tercera entrega de 50 £, y el 22 de febrero de 1678 «apremiado Ducane que me promete pagarme 50 £ en marzo». El último pago, finalmente, se efectuó el 4 de mayo.

Los honorarios de Hooke de 200 £ como arquitecto y director (surveyor) —proyectista y director de obra, con asistencia a las reuniones en obra— se puede comparar con el gasto total de unas 17.000 £ del nuevo hospital. Durante el mismo período desempeñó el mismo trabajo en la casa de lord Montagu (en el lugar que ocupa en la actualidad el Museo Británico); los honorarios acordados fueron 250 £ para una casa que costaba 2.300 £.

La construcción en Londres tras el Gran Incendio

La forma de trabajar en la industria de la construcción experimentó un cambio radical e irreversible en un período de apenas 50 años en el siglo XVII.[10] El nuevo modo tenía un precedente en Íñigo Jones, en su Banqueting House para el palacio de Whitehall (1619–22), construida por el maestro de obras Nicholas Stone, así como en sus remodelaciones para la vieja catedral de S. Pablo, incluido el pórtico oeste (1633–42), para el que había contratado al maestro de obras Edmun Kinsman. Íñigo Jones no se consideraba a sí mismo un constructor: no había seguido la dura formación que conducía de aprendiz a oficial y a maestro, durante la que se aprendían los secretos del oficio. De hecho, la técnica de un cantero, aunque era difícil y su adquisición requería la larga experiencia en el taller del maestro, no era tan compleja —el dominio sobre la forma adquirido en este aprendizaje podía ser entendido por un caballero sin necesidad de mancharse las manos. Íñigo Jones había recibido alguna formación artesanal, de carpintero, antes de despuntar como artista, escenógrafo y arquitecto. Es Wren, sin embargo, junto con Hooke y los proyectistas del estudio de Wren los que pueden considerarse como los primeros auténticos arquitectos británicos, dispuestos y capacitados para proyectar edificios sin haber pasado por la experiencia previa del trabajo manual del constructor.

Hasta aproximadamente 1620 el trabajo de la construcción en Inglaterra seguía siendo medieval,[11] con maestros independientes a los que sus clientes contrataban conjuntamente el proyecto y la ejecución. Por ejemplo, la familia Strong, propietarios de canteras de caliza en Gloucestershire y Oxfordshire, podían intervenir como proyectistas y como constructores (y suministradores de piedra). El Patio de Canterbury, en el St. John's College, en Oxford, fue construido de esta manera por Timothy Strong y su hijo Valentine; más tarde, los hijos de Valentine, Thomas y Edward, continuaron con el negocio familiar. Ambos eran canteros pero también habían recibido una sólida formación sobre el tratamiento arquitectónico de la piedra. Thomas abrió una taller en Londres después del Gran Incendio para ofrecer sus servicios completos y para proveer a otros constructores con la piedra de sus canteras de Cotswold. La habilidad de los Strongs era muy apreciada en el estudio de Wren, y se les encomendaron importantes contratos en San Pablo y en varias de las iglesias de Wren —por su parte, los Strongs mostraban la mejor disposición para llevar a cabo los proyectos de otros.

El arquitecto asesor no fue una figura del todo desconocida en los tiempos medievales. William Hurley, el Carpintero Real, proyectó una singular linterna de madera, totalmente original, para la catedral de Ely en 1334; la linterna fue construida por el maestro carpintero local Geoffrey de Middylton. Más tarde, en el mismo siglo, en 1394, el Maestro de Obras Real, Henry Yeveley, recibió el encargo de remodelar Westminster Hall (cuya armadura de palomillas había sido proyectada por otro Carpintero Real, Hugh Herland). Un siglo más tarde, el proyectista y constructor de las bóvedas de abanico de la capilla de King's College en Cambridge, John Wastell, recibió el asesoramiento de los hermanos Vertue, que habían construido bóvedas similares en Bath y en la abadía de Westminster. Sin embargo, en todos estos casos los arquitectos asesores eran maestros de obras; maestros instruyendo a maestros.

En ese ambiente medieval y gótico se desenvolvía el oficio de la construcción en el siglo XVII; un ambiente envuelto ahora en el olor a humo del Gran Incendio. El programa de reconstrucción era tan vasto que con la organización del trabajo existente no era posible construir la cantidad de edificios demandados. Un maestro constructor, con sus hombres, su propia cantera y con una pequeña cantidad de capital,

llevando a cabo contratos de proyecto y construcción, tenía una repercusión muy pequeña en, por ejemplo, las 51 iglesias reconstruidas después del Incendio. Fue la escala del trabajo necesario en las iglesias, en la catedral de San Pablo y en las casas privadas lo que forzó a la industria de la construcción a adoptar una organización moderna

Esta escala se aprecia bien con una comparación actual: por ejemplo, es difícil gastar más de 2 millones de libras al año en la restauración de una catedral gótica. Esta cantidad implica un gran número de trabajadores, un suministro constante de materiales de construcción, la dirección y control del arquitecto, la ejecución de nuevos planos para resolver problemas imprevistos, etc. —la organización del trabajo se tiene que controlar rigurosamente. El gasto en Bedlam en 1675/76 fue de 17.000 £ durante los dos años, y el rigor del control se muestra explícitamente en las entradas del diario de Hooke. Solo en San Pablo el gasto medio fue de 20.000 £ al año, a lo largo de 35 años, lo que vuelve a dar una idea de la magnitud de la operación —no era infrecuente que se encontrasen casi 200 hombres en la obra entre capataces y obreros.[12]

El estudio de Wren se adaptó para afrontar esta empresa de una forma que se aproxima a la de un estudio actual. El propio Wren señala las tres formas principales de asignar trabajo a los contratistas. La primera era el contrato tradicional por un precio fijo: el constructor se compromete a acabar el trabajo según unas condiciones y por una cantidad de dinero acordada. El método se prestaba a abusos, pero resultaba adecuado para subcontratos especializados, como el emplomado de una cubierta de madera. El segundo era un método poco satisfactorio de pago por valoración: una vez completado el trabajo, un tasador independiente lo valoraba y el resultado se pagaba al contratista. Por último, el método más utilizado por Wren con sus principales contratistas, y usado habitualmente en la actualidad, consistía en trabajar por medición: el trabajo se definía técnicamente (la construcción de un muro, por ejemplo) y se acordaba con el contratista el precio unitario (tanto por cada pie cuadrado terminado); el trabajo acabado era, finalmente, comprobado por el «medidor» —el aparejador de la obra. Este modo de proceder se aprecia en las notas de Hooke sobre Bedlam: acuerda un precio unitario para las pilas de los cimientos y de nuevo con los subcontratistas de la cubierta.

Con estos procedimientos cada uno de los constructores podía cobrar a medida que las obras avanzaban. Aún así se necesitaba un importante capital, que Fitch fue capaz de asumir por sí mismo en el contrato de 17.000 £ de Bedlam. Para San Pablo, sin embargo, el Building Fund proporcionó el capital y Wren lo administró según su criterio. Comenzó con dos contratistas importantes simultáneamente y, en ocasiones, mantuvo a tres o cuatro trabajando en diferentes partes de la Catedral. El primer lote de los grandes contratos de cantería fue para Joshua Marshall, Maestro Cantero de la Corona en la Oficina de Obras, y el segundo, para Thomas Strong, de Cotswolds. Los Strong permanecieron en San Pablo desde el principio hasta su terminación.

Uno o varios de los socios del estudio de Wren —Wren y Hooke, Woodroof y, más tarde, Hawksmoor— se encargaban de controlar a todos estos contratistas, tanto en San Pablo como en las obras de las iglesias (25 ya se habían iniciado cuando empezaron las obras de la Catedral). El aparejador —Scarborough, el encargado de las mediciones— elaboraba los informes de todos los edificios y, si era necesario, era enviado a hablar con Ducane para intentar cobrar los honorarios de Hooke por el proyecto de Bedlam. Parece evidente que Hooke, como socio que era, utilizaba el estudio de Wren para desarrollar todo el trabajo que generaba Bedlam.

El problema de la liquidez ya no volvió a recaer directamente en los constructores de los contratos más importantes, pero el problema se mantenía para el cliente. La Fundación para la Construcción de San Pablo recibía contribuciones voluntarias (al principio cerca de 10.000 £ por año), y un Acta del Parlamento de 1670 asignó a la Fundación «cuotas sobre el carbón», en un porcentaje de 4 peniques y medio por cada chaldrón o cuba de carbón desembarcada en el puerto de Londres —lo que supuso entre 4.000 y 5.000 £ anuales. A medida que pasaba el tiempo la obra se benefició de numerosas donaciones, pero trascurridos 20 años (y varias fluctuaciones importantes en los ingresos) la Fundación se encontraba fuertemente endeudada. Las deudas eran sobre todo con los contratistas principales. En 1694 estos contratistas propusieron una solución excepcional: que las deudas se considerasen préstamos de los contratistas a la Fundación. De esta forma las obras se reanudaron mientras los créditos se revalorizaban al 6 por ciento de interés; más de 24.000 £ pasaron de

deuda a crédito en los libros de cuentas. Strong, por ejemplo, figuraba como acreedor de la inmensa cantidad de 2.500 £: los contratistas se habían vuelto hombres ricos. Pero no desproporcionadamente ricos; 24.000 £ en un gasto estimado de medio millón es aproximadamente el 5 por ciento, así que los beneficios de los contratistas eran más que razonables. De esta manera las obras pudieron continuar y una nueva Acta en 1697 proporcionó al menos cierta seguridad financiera. Finalmente se pudo pagar a los contratistas y en 1708 se hizo una provisión más generosa para cubrir los gastos de los años finales.

Este tipo de acuerdos financieros apenas han cambiado a lo largo de 300 años: un fondo para la construcción (actualmente, para las reparaciones importantes de una catedral), que se financia con la mitad de las aportaciones procedentes del Gobierno y la otra mitad de suscripciones populares y donaciones. Como ocurre ahora, también entonces existía la tentación de cargar gastos corrientes —el mobiliario de la sacristía del deán, nuevos reclinatorios, encuadernaciones de ejemplares de la Biblia— al Fondo para la Construcción.

Hooke ingeniero

Tres de los cuatro o más profesionales que intervienen en la obra de un edificio moderno aparecen ya en Bethlem, concretamente el arquitecto (Hooke), el aparejador de mediciones (Scarborough) y el, o los contratistas (Fitch y otros). Otro profesional puede identificarse hoy en día con varios técnicos —el ingeniero de estructuras, el experto en geotecnia, el ingeniero de calefacción, el ingeniero mecánico y el eléctrico. Los dos últimos, por supuesto, no existían en el siglo XVII, pero Hooke, cuando actuaba como arquitecto, era también su propio ingeniero, tanto de estructuras como geotécnico, en el caso de que fuese necesario. Los problemas que aparecieron en Moorfields no eran nuevos, sino del tipo de problemas que los contratistas conocían bien, aunque, a juzgar por la historia del edificio, parece que el proyecto «tradicional» de las cimentaciones no fue del todo adecuado para la mala calidad del terreno.

Normalmente Hooke confiaba en la experiencia de sus contratistas para resolver los problemas de «ingeniería» de determinadas construcciones. Un proyecto que debió preocupar a Hooke fue el Monumento y, de hecho, realizó numerosas visitas durante la construcción del «Pier of Fish Hill» (la Columna de Fish Hill). El Monumento tiene unos 60 m de altura, y todo indica que Hooke depositó su confianza en el contratista, Joshua Marshall, Maestro de Obras Real. La obra se construyó casi diez años después del Incendio y, por entonces, en el estudio de Wren se conocían bien las capacidades de cada uno de los constructores disponibles. Joshua Marshall fue contratado para la obra de Wren en San Pablo cuando el Monumento estaba a punto de terminarse.

En otra ocasión, cuando Wren y Hooke se ocupaban del proyecto y la construcción del encauzamiento del río Fleet, confiaron plenamente en la experiencia de Thomas Fitch para la apertura y ejecución de los canales. Mientras Bedlam se construía, John Fitch trabajaba en al menos otros dos edificios de Hooke: Montagu House se construyó entre 1675 y 1680, y el nuevo edificio para el Real Colegio de Médicos, en Warwick Lane, se completó en la década de 1670.

Al igual que Bedlam, Montagu House en Bloomsbury se construyó sobre terrenos alterados, poco adecuados para proporcionar una buena cimentación, y aquí se muestra cómo Hooke aporta al proyecto una solución de ingeniero. Tanto Wren como Hooke conocían bien *Los diez libros de Arquitectura*, de Alberti, publicado dos siglos antes, en el que aconseja el uso de arcos invertidos bajo tierra para transmitir el peso de la construcción.[13] Estos arcos invertidos distribuyen las cargas más uniformemente sobre el terreno, por lo que Hooke construyó arcos de ladrillo con esta forma en Montagu House. Wren tomó la misma idea casi simultáneamente para la cimentación de la nueva biblioteca del Trinity College, en Cambridge, también construida sobre terrenos de mala calidad.[14]

Un segundo ejemplo de «ingeniería» ajeno al repertorio de un constructor tradicional tiene que ver con la cúpula de la catedral de San Pablo. El 5 de junio de 1675 Hooke anota en su diario: «Con sir Chr. Wren … Compromete a Fitch para San Pablo. Está aplicando mi principio sobre arcos y por eso cambió su diseño». El «principio» de Hooke consistía en que la forma del arco perfecto que soporta determinadas cargas era el de una cadena flexible, colgada, soportando las mismas cargas, pero invertida. La forma para una carga uniforme es la de una catenaria; podía obtenerse experimentalmente, pero Hooke (y otros

coetáneos en la Royal Society) todavía no eran capaces de resolver su forma matemáticamente. Hooke planteó su principio en una reunión de la Royal Society en 1670, y en 1671, en una reunión posterior, amplió el principio del arco bidimensional a la cúpula. Mantuvo, incorrectamente, que la forma perfecta era la de un conoide cúbico-parabólico; no obstante, la diferencia entre esa superficie y la superficie matemática exacta es realmente muy pequeña.[15]

La cuestión esencial del «principio» de Hooke es que la cadena colgante, y su equivalente tridimensional, nunca arrancan verticalmente de los estribos, de forma que el tambor que soporta la cúpula debe inclinarse hacia dentro en vez de mantenerse vertical. Wren construyó la cúpula de ese modo, y disimuló la inclinación añadiendo una columnata externa —la cúpula de Hooke para San Pablo se ha mantenido, y esto es excepcional en cúpulas de fábrica, sin experimentar las marcadas grietas meridianas habituales.

Estos dos problemas de ingeniería estructural, la cimentación con arcos invertidos y la cúpula perfecta, se podrían haber ilustrado con un modelo matemático pero, lo cierto es que no se necesitan las matemáticas para su aplicación. Lo que sí se precisa es una profunda comprensión de la mecánica, es decir, un entendimiento del modo en que las fuerzas actúan en una estructura de fábrica, y la idea de la cadena invertida proporciona esa comprensión. En general, otros problemas estructurales a los que Hooke se tuvo que enfrentar difícilmente podrían ser calificados como problemas de ingeniería; generalmente se trataba de cuestiones técnicas del oficio para las que ya existían soluciones bien conocidas, y que en tiempos anteriores, seguramente, habrían figurado en los libros secretos de las logias de constructores.

19
La plasticidad del hormigón en masa

El material

Para que un material sea útil estructuralmente debe ser dúctil. Es decir, el acero, el hormigón poco armado, las aleaciones de aluminio y quizá el hierro forjado, son materiales aceptables, pero el hierro fundido y el vidrio no lo son —se romperían si se incorporan como elementos portantes en una estructura real. El hormigón es frágil, y es el refuerzo de acero (u otro material) el que confiere la ductilidad al hormigón armado en vigas, columnas y losas. Que el hormigón sin armar pueda ser utilizado con seguridad en la construcción no es algo obvio.

Sin embargo, este punto de vista se contradice de inmediato por la existencia continuada, por ejemplo, del Panteón Romano, durante casi dos milenios. Con 43 m de luz, la cúpula de hormigón en masa supera por un metro la luz de las cúpulas de fábrica de ladrillo de San Pedro de Roma y de Florencia. Al igual que estas cúpulas, la del Panteón se ha agrietado debido a pequeños movimientos de la subestructura de apoyo, y, al igual que estas cúpulas, a pesar de las grietas, es perfectamente estable bajo la acción de su propio peso y de las sobrecargas —viento y nieve. De hecho, es el agrietamiento lo que ha conferido la ductilidad al hormigón en masa (y a la fábrica de ladrillo o piedra); las cúpulas han sido capaces de adaptarse a los cambios (imprevistos y desconocidos) de sus «condiciones de contorno».

El hormigón en masa agrietado se comporta de hecho como la fábrica de piedra o ladrillo agrietada, y su comportamiento puede ser interpretado a la luz de los teoremas plásticos. Estos teoremas, desarrollados inicialmente para estructuras de acero y aplicados más adelante al hormigón armado, son válidos si se utilizan con precaución para cualquier material estructural dúctil.

El arco de fábrica

Una estructura de fábrica muy sencilla es el arco de un solo vano, que podría en teoría, y de hecho en la práctica, ser construido con hormigón en masa. Sin embargo, por el momento limitaremos la atención a la construcción más tradicional. La figura 19.1(a) muestra de manera esquemática pero razonablemente realista un arco de fábrica compuesto de dovelas de piedra en forma de cuña. El mortero entre las dovelas es normalmente muy débil a tracción, y en la práctica puede no existir, de modo que, realmente, no hay nada que evite que las piedras se puedan separar. Por otro lado, las fuerzas de compresión entre las dovelas son tan pequeñas que las tensiones resultantes son muy bajas —incluso un puente de gran luz presenta tensiones bien por debajo del 10 por ciento de la resistencia a compresión de la piedra.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The plasticity of unreinforced concrete». En: *Proceedings of the Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Applications*. (Cambridge: University of Cambridge, 2007): 157–162. Traducción de Paula Fuentes González.

Con estas observaciones en mente, se pueden formular las propiedades materiales de la fábrica, y hay tres hipótesis fundamentales, establecidas para el arco de dovelas, pero que se pueden aplicar a otras formas estructurales (por ejemplo, los elementos de una gran iglesia: torres, agujas, bóvedas, estribos, etc.):

El fallo por deslizamiento es imposible
Se considera que el rozamiento entre las dovelas es suficientemente alto, o que las piedras se traban de manera eficaz, de modo que no pueden deslizar una sobre otra. Se trata de una suposición razonable, aunque sin duda es posible encontrar evidencias ocasionales de deslizamiento en estructuras de fábrica.

La fábrica no tiene resistencia a tracción
La piedra en sí tiene una cierta resistencia a tracción, pero son las juntas entre las piedras las que son débiles. Así, esta suposición implica que entre los elementos de fábrica sólo se pueden transmitir fuerzas de compresión. De acuerdo con el sentido común, y con los principios de los teoremas plásticos (discutidos más adelante), esta suposición es «segura».

La fábrica tiene una resistencia a compresión infinita
Esta suposición se deriva del hecho de que, en la práctica, las tensiones están muy alejadas de la resistencia de rotura a compresión del material. La suposición es, evidentemente, «insegura», pero es realista; se discutirá más adelante.

De este modo surge una imagen de la fábrica como un conjunto de piedras conformadas para unirse en una forma estructural coherente, manteniéndose esta forma mediante las fuerzas de compresión que se transmiten dentro de la masa del material. (Dado que las tensiones son bajas, el término «fábrica» no incluye sólo la piedra y el ladrillo, más débil, sino también bloques de hormigón aligerado y otros materiales más primitivos, como el barro secado al sol.) Surge la pregunta de cómo un macizo de fábrica de este tipo puede fallar en un sentido estructural significativo. Si la fábrica es infinitamente resistente, entonces parece que el cálculo de los niveles de tensión de compresión no será relevante. Sin embargo, la idea de que la tracción no se puede producir, sí es significativa.

El arco de la figura 19.1(a) se construiría sobre un andamiaje temporal, una «cimbra»; una vez colocada la clave del arco, la cimbra se puede retirar, y el arco inmediatamente comenzará a empujar contra sus apoyos, y éstos (por ejemplo las orillas del río), inevitablemente cederán. El arco, compuesto por dovelas resistentes, prácticamente rígidas, tendrá que adaptarse a un ligero incremento de la luz, y lo hace formando grietas en las juntas, mostradas exageradamente como «articulaciones» o «rótulas» en la figura 19.1(b). Así, el arco se deforma libremente para adaptarse a la nueva luz, y, a pesar de la fragilidad de los elementos individuales, la estructura en su conjunto tiene un comportamiento «dúctil».

Las fuerzas estructurales de compresión deben pasar necesariamente por los puntos de articulación de la figura 19.1(b), y la línea de trazos representa lo que podríamos llamar, con cierta imprecisión, línea de empujes, es decir, la resultante de las fuerzas de compresión transmitidas de dovela a dovela dentro del perfil de la fábrica. Si se examina una junta en particular *Mm*, figura 19.2, la acción estructural en la junta queda determinada por la magnitud, dirección y

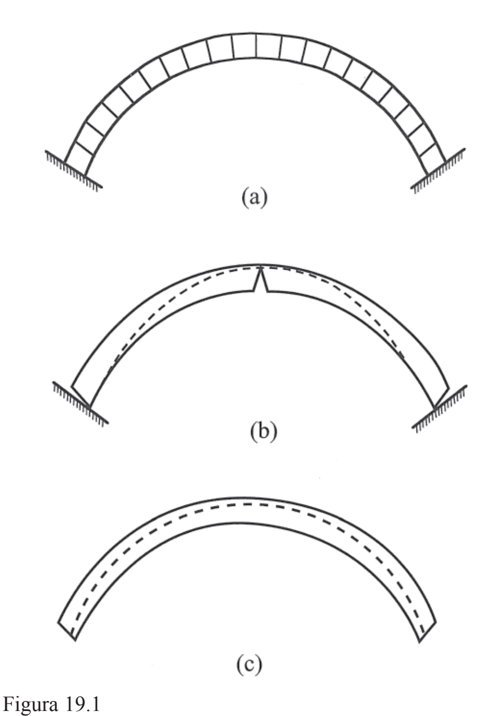


Figura 19.1
Arco de dovelas de fábrica: (a) en origen, tras su construcción (b) después de la apertura de los apoyos, (c) posición general de la línea de empujes.

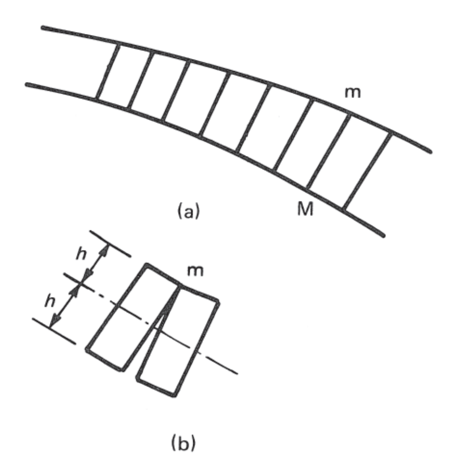


Figura 19.2
Formación de una articulación en un arco de dovelas

punto de aplicación de la fuerza transmitida a través de ella. La componente tangencial de la fuerza no es relevante, ya que se ha supuesto que se no se puede producir deslizamiento: lo que se necesita es el valor N de la fuerza normal en la junta, junto con el valor de su excentricidad, e, respecto al eje de la sección. Resulta conveniente trabajar con un «momento flector» $M = Ne$ como una segunda variable, de modo que las resultantes de tensión M, N definan el estado del arco en cualquier sección.

La articulación de la figura 19.2(b) se forma cuando la excentricidad e del empuje normal alcanza el valor de h, esto es, cuando $M = hN$. Las líneas $M = \pm hN$ son las rectas OA y OB en la figura 19.3(a), y representan, para cualquier junta entre dovelas, la condición de que existe una articulación en esa junta. Un punto cualquiera (N, M) contenido dentro del triángulo abierto AOB, representa un empuje entre dovelas con una excentricidad menor que h, es decir, la línea de empujes se encuentra en el interior de las dovelas en esa junta y no se forma ninguna articulación. Si el punto está situado sobre OA u OB, entonces se está formando una articulación, ya sea en el intradós o en el trasdós del arco. El punto no puede estar situado fuera de la región AOB, ya que esto implicaría tracción en las juntas.

La construcción de la figura 19.3(a) implica la suposición de que el material tiene una resistencia a compresión infinita. A medida que la línea de empujes se aproxima al borde de la dovela, la tensión sobre el área de contacto va aumentando, ya que el área

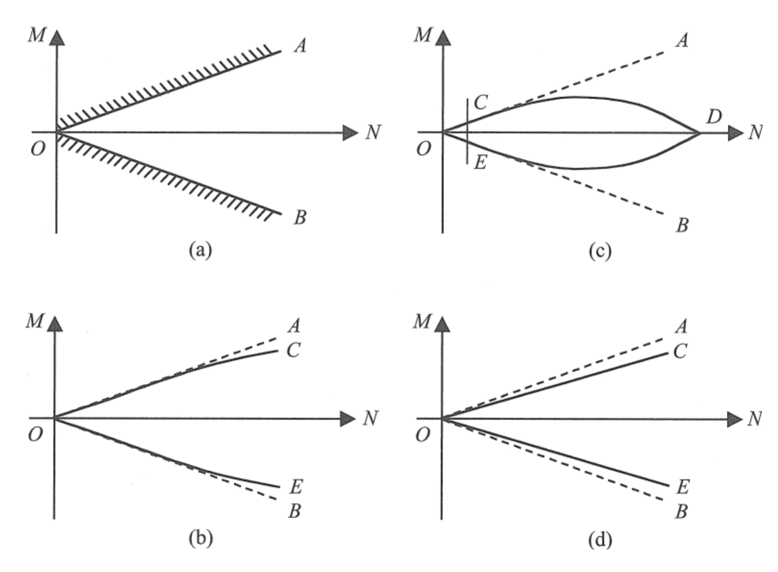


Figura 19.3
Superficies de cedencia en la fábrica. (a) Material infinitamente resistente a compresión. (b) y (c) Material con resistencia finita a compresión. (d) Aproximación a la superficie de cedencia

disminuye, y una piedra real con una resistencia a compresión limitada no permitirá el contacto en una línea en la articulación de la figura 19.2(b). Así, las líneas *OA* y *OB* en la figura 19.3(a) no se pueden llegar a alcanzar, y se sustituyen por las líneas ligeramente curvas de la figura 19.3(b). El límite completo está formado por los arcos parabólicos *OCD* y *OED* en la figura 19.3(c), y el punto genérico (*N*, *M*) debe estar dentro de este límite. La suposición de tensiones medias de compresión bajas obliga de hecho a que el punto (*N*, *M*) esté contenido dentro de un área como la *OCE* en la figura 19.3(c), y es esta área la que se ha ampliado en la figura 19.3(b).

Los diagramas mostrados en la figura 19.3 son, naturalmente, las superficies de cedencia de la teoría plástica, y se pueden por tanto aplicar los principios plásticos. Un punto genérico (*N*, *M*) contenido dentro de la superficie de cedencia completa de la figura 19.3(c) representa un estado seguro para la fábrica. Los límites curvos de la figura 19.3(b) también representan una superficie de cedencia «segura», y se pueden hacer rectos de la manera mostrada en la figura 19.3(d). Si se sabe que la tensión media de compresión no excede el 10 por ciento de la tensión de rotura a compresión de la piedra, entonces las rectas *OA* y *OB* se pueden sustituir por $M = \pm 0{,}9hN$. Así, el arco real que tiene un espesor de rosca (local) de $2h$ se sustituye, a efectos del análisis, por un arco hipotético de espesor $2(0{,}9h)$. (Este tipo de «reducción» es importante al evaluar la seguridad de los arcos de fábrica.)

Se ha imaginado que los apoyos del arco en la figura 19.1 se separan, conduciendo al patrón de agrietamiento ilustrado en la figura 19.1(b). La estructura, originalmente hiperestática (con tres redundancias), se ha transformado en un arco «triarticulado», una estructura estáticamente determinada; para una carga conocida, es posible determinar el valor del empuje en los apoyos (que es, de hecho, el valor mínimo que permite mantener el arco en equilibrio). El arco triarticulado es una forma estructural adecuada y bien conocida —la formación de tres articulaciones por agrietamientos en las juntas no es un preludio del colapso.

Si los estribos del arco no se separan, o lo hacen sólo ligeramente, y las dovelas son casi, pero no completamente rígidas, entonces las juntas entre dovelas se mantienen en contacto, y no se abren grietas de articulación que ayuden a localizar la línea de empujes. Todo lo que el calculista puede demostrar es que la línea de empujes ocupa una posición como la mostrada en la figura 19.1(c), situada completamente dentro de la fábrica. De hecho, esto es todo lo que tiene que demostrar. Si se puede encontrar una posición como la mostrada en la figura 19.1(c), entonces esta es una demostración absoluta, por el «teorema de la seguridad» de la teoría plástica, de que la estructura es segura. Si el calculista puede determinar una manera en la que la estructura puede soportar las cargas dadas, por supuesto la estructura encontrará una manera de hacerlo.

Esta observación antropomórfica no da, en sí misma, ninguna indicación de qué grado de seguridad tiene la estructura. Dado que se ha supuesto que la fábrica tiene resistencia a compresión infinita, no es posible un fallo del material. En su lugar, se puede idear un criterio geométrico. Tal y como se muestra en la figura 19.1(c), la forma de la línea de empujes no coincide con la del perfil del arco, y hay un espesor mínimo del arco que contiene justo la línea de empujes.

En 1675, Robert Hooke identificó la forma de la línea de empujes con su afirmación: «del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». En otras palabras, si se aplicara la carga del arco a un hilo ligero, entonces la forma del hilo traccionado sería la misma, invertida, que la del arco con las mismas cargas a compresión. En la figura 19.1(c), por ejemplo, si la carga resultante del perfil circular del arco fuera uniforme, entonces la línea de empujes mostrada en la figura sería, matemáticamente, una catenaria. Un arco construido con un espesor capaz de contener justo una catenaria tendría una estabilidad precaria, mientras que un arco de doble espesor admitiría fácilmente una amplia gama de posibles líneas de empujes. En la práctica, un «coeficiente geométrico de seguridad» de 2 parece que resulta apropiado para tener en cuenta las irregularidades de la construcción y los movimientos impuestos por el entorno, circunstancias que pueden distorsionar la geometría proyectada original.

Hormigón en masa

Se puede tener en cuenta el hecho de que el hormigón en masa tiene una pequeña resistencia a la tracción

(mayor que cero), para aceptar su comportamiento de manera más formal en el marco de la teoría plástica. Se puede imaginar que el arco de la figura 19.1 está construido en hormigón en masa; una apertura de los apoyos, figura 19.1(b), provocará esfuerzos de tracción en el material. Donde estas tracciones sean mayores, se producirán grietas, y se desarrollará el patrón de «articulaciones» de la figura 19.1(b). Sin embargo, la pequeña resistencia a tracción del material garantiza que en otras partes el arco permanece unido y, en lugar de ser monolítico, el arco se compone ahora de dos elementos. Los argumentos estáticos desarrollados para el arco de dovelas de piedra no cambian, y la línea de trazos de la figura 19.1(b) representa la línea de acción de las fuerzas de compresión que pasan dentro del espesor del arco (de dos elementos).

La suposición de una pequeña resistencia a tracción del material es necesaria para la integridad de la estructura. Sin esta suposición, el hormigón se desintegraría en pequeñas partículas —no es posible construir el arco de la figura 19.1 con arena seca. Sin embargo, siempre y cuando la estructura de hormigón en masa siga siendo una estructura, agrietada o no, se puede llevar a cabo su análisis mediante el uso de la teoría plástica.

Por encima de todo, el «teorema de la seguridad» es la herramienta fundamental del ingeniero. La exposición anterior se refiere al arco simple, pero cualquier estructura de hormigón en masa, por compleja que sea, es segura si puede contener las fuerzas de compresión en equilibrio con las cargas externas. Todo lo que el calculista tiene que demostrar es que al menos uno de tales sistemas es posible.

El Panteón de Roma

Las cúpulas de fábrica están agrietadas, casi sin excepción (parece que la única excepción es la cúpula doble de fábrica de la catedral de San Pablo de Wren). Las grietas se muestran como un patrón regular en la figura 19.4, y las grietas reales en San Pedro de Roma, y la cúpula octogonal de Santa Maria del Fiore, Florencia, se ajustan estrechamente a esta configuración. Las grietas se producen por la apertura del tambor cilíndrico, o prismático, de soporte (compárese con el agrietamiento del arco bidimensional debido a la apertura de los apoyos

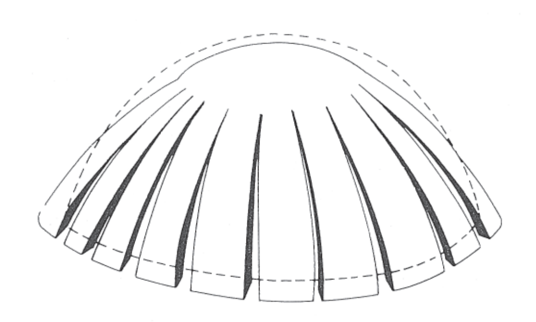


Figura 19.4
Esquema, muy exagerado, del agrietamiento de una cúpula debido a un incremento de la luz

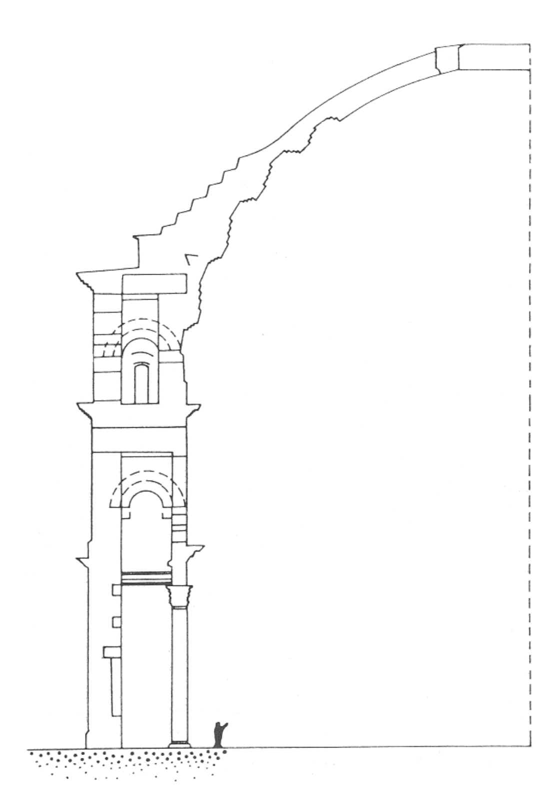


Figura 19.5
Sección transversal del Panteón de Roma (120 d.C.)

de la figura 19.1), y siguen líneas meridianas, desapareciendo cuando se acercan a la clave. De hecho, el casquete superior se mantiene sólido, y en realidad está soportado por un número (grande) de (medios) arcos cuasi bidimensionales que se van estrechando. La cúpula interior de San Pablo tiene un óculo en la clave, y los arcos decrecientes hacia el centro soportan eficazmente un anillo horizontal de fábrica sometido a tensiones anulares de compresión.

El Panteón de Roma (ca. 120 d.C.) también tiene un óculo, y presenta igualmente grietas meridianas; sin embargo, esta cúpula está construida en hormigón en masa. La sección transversal mostrada en la figura 19.5, debe interpretarse como la representación de una serie de arcos decrecientes hacia el interior —«gajos de naranja»— compuestos de hormigón en masa. Cada uno de estos gajos se puede analizar como un arco bidimensional, y es sencillo encontrar líneas de empujes que estén contenidas enteramente dentro de la fábrica y, por tanto, confirmar que es posible calcular unos conjuntos de esfuerzos en el hormigón que son puramente de compresión. Por otra parte, el análisis permitirá calcular con precisión el valor estimado del empuje horizontal que la cúpula ejerce sobre la estructura cilíndrica de apoyo.

Conclusiones

- Los ingenieros y arquitectos utilizan una gran variedad de materiales y formas en el proyecto de estructuras. Todas estas estructuras tienen como propiedad común la ductilidad —pueden deformarse, dentro de unos límites aceptables, sin un descenso de la carga aplicada. La ductilidad puede proceder de la «plasticidad» de los materiales (por ejemplo el acero dulce, el hormigón armado, la aleación de aluminio) o del propio comportamiento de la estructura en sí (se debe evitar un colapso prematuro por pandeo inestable).
- El hormigón en masa, con una pequeña resistencia a tracción, se agrietará cuando se utiliza en una estructura real. Tal agrietamiento, lejos de presagiar el colapso, divide la estructura en bloques de «fábrica», y la estructura en su conjunto puede deformarse de manera dúctil para dar cabida a los movimientos impuestos por el entorno.
- Las estructuras construidas con hormigón en masa se pueden analizar usando los principios plásticos tal y como se aplican a las fábricas. Por encima de todo, si se puede encontrar un conjunto *cualquiera* de fuerzas con el que la estructura se encuentre «cómoda», entonces tenemos la garantía de que la estructura es segura.

20
Pilares y columnas góticos

Algunas columnas de fábrica parecen «gruesas», y otras no tanto. Al hacer este juicio intuitivo (y acientífico), probablemente el ojo está condicionado por el recuerdo de las proporciones de las construcciones griegas y romanas. Por ejemplo, las columnas del templo de Paestum (aproximadamente 450 a.C.), figura 20.1A, tienen una relación entre la altura y el diámetro de la base de alrededor de 4, y sin duda parecen robustas. Las columnas del Partenón, construidas un poco más tarde pero con el mismo orden dórico, figura 20.1B, también parecen sólidas, pero son claramente más esbeltas, con una relación entre la altura y el diámetro de la base de aproximadamente 5. De hecho, las proporciones de las columnas dóricas varían entre 4 y 6½. Medio siglo más tarde, las columnas de orden jónico se construyeron más esbeltas: las del Erecteion, hacia 400 a.C., figura 20.2, tienen relaciones entre altura y diámetro de alrededor de 9.

Cuatro siglos más tarde, Vitruvio da las proporciones correspondientes a los distintos estilos de templos y especifica relaciones comprendidas entre 8 y 10. Sin embargo, deja clara constancia de que el ojo es sensible, no solo a las columnas individuales, sino también a la distancia entre esas columnas: el intercolumnio. Para los griegos, que carecían del conocimiento del arco, el máximo intercolumnio venía condicionado por el tamaño de las mayores piezas de piedra que se pudiesen cortar para los arquitrabes. Vitruvio proporciona reglas modulares para los intercolumnios que varían (para diferentes templos) entre 1½ y 3 diámetros (es irónico que este espaciado tan pequeño, quizá adecuado visualmente, pero impuesto estructuralmente por el tamaño de los arquitrabes, en realidad no era necesario. Siempre que se pueda movilizar alguna restricción horizontal, un arquitrabe se puede partir en dos a la mitad de su luz, y actuará con la misma seguridad que un rudimentario arco plano de dos piezas, como ocurre en los Propileos, (Heyman 1972)).

Es notable que en todo lo anterior no se mencione el tamaño; la simple regla (altura/diámetro) es una regla de proporción. Y es que Vitruvio, en su Libro III, sostiene que la proporción es la base de la arquitectura y relaciona las reglas con las proporciones del cuerpo humano.

La construcción de fábrica

Para un ingeniero de estructuras moderno, acostumbrado a calcular fuerzas, tensiones, deformaciones, etc., parece extraño que reglas numéricas puedan servir de base para el proyecto de grandes edificios de fábrica pero, de hecho, un modelo de análisis satisfactorio puede basarse simplemente en consideraciones geométricas. Una columna romana o griega se

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Gothic piers and columns». En: *La colonne. Nouvelle histoire de la construction.* (Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008): 59–59. Traducción de Rosa Ana Guerra Pestonit.

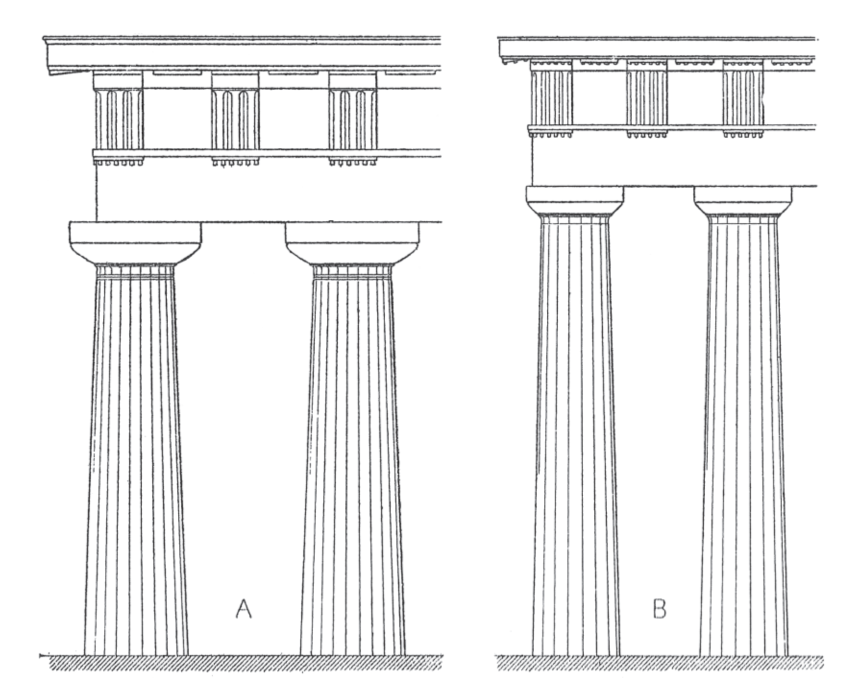


Figura 20.1
Templo de Paestum (A) y el Partenón (B). (Choisy 1899)

compone de un cierto número de grandes tambores cilíndricos, situados unos sobre otros sin mortero y, por tanto, manteniendo su coherencia gracias a las fuerzas gravitatorias de compresión. Estas columnas, sin embargo, pueden verse amenazadas por terremotos, que podrían generar esfuerzos de tracción y provocar deslizamientos en las juntas. De igual forma, los elementos de una catedral gótica, construidos con un mortero débil entre sus juntas, pueden resistir la compresión, pero la obra tendería a desmembrarse en presencia de esfuerzos de tracción. La fábrica es, de hecho, un modo de construcción que basa su estabilidad en el trabajo a compresión de todos sus elementos.

Si se calculan las tensiones de compresión en las columnas griegas o, por ejemplo, en las piedras de una gran catedral, o incluso en un puente de gran luz, se encontraría que son muy bajas. En números redondos, los elementos más solicitados de una gran catedral gótica están trabajando a menos de la décima parte de la tensión de rotura del material; los elementos estructurales principales (arbotantes y similares), a una centésima, y los elementos de relleno (como las plementerías de las bóvedas), a una milésima. Estas son, por supuesto, cifras aproximadas, pero permiten al ingeniero descartar (al menos en un análisis preliminar, y en muchos casos muy exacto) la necesidad de cualquier cálculo de las tensiones. Es el concepto de un material sin resistencia a tracción y con una resistencia a compresión infinita el que permite la aplicación de la llamada teoría plástica, y esta teoría confirma que las antiguas reglas de proporción, encaminadas a asegurar la forma correcta son, precisamente, las que se necesitan en el proyecto de una obra de fábrica (Heyman 1995).

Por esta razón los libros de las logias medievales —precursores de los códigos y normas para los proyectos de estructuras— proporcionan reglas geométricas que recuerdan mucho a las de Vitruvio (cuyo libro sobrevivió durante los «Años Oscuros», y está presente de forma reconocible en el trabajo de los maestros medievales). Lo que se había perdido en el primer milenio, sin embargo, fue la experiencia práctica que había sido adquirida por los constructores griegos y romanos, y algunos avances parece que se vuelven a

hacer de nuevo. Las columnas románicas de los siglos XI y XII son gruesas (como las de Durham, Ely y Peterborough, por ejemplo), y la evolución del dórico al jónico (figuras 20.1 y 20.2) se repite en la transición hacia columnas más esbeltas en el Alto Gótico. Pero incluso así, la relación altura/diámetro de los pilares principales en la nave y cabecera de una iglesia gótica típica pocas veces supera el valor de 8. Es más, aunque esos pilares soporten arcos en lugar de simples arquitrabes, las dimensiones del intercolumnio bien podrían haber sido aceptadas por Vitruvio (por ejemplo, el tamaño de un tramo habitual en una nave o cabecera inglesas es de 12 por 6 metros; columnas de 1,2 m de diámetro suponen un intercolumnio de 4,8 m, una proporción de 4 diámetros. Un tramo de una de las grandes catedrales francesas podría tener un ancho de 15 m, una dimensión que solo fue superada en el último gótico en España y Francia).

El pandeo de columnas

Aplicar las palabras «robusto» y «esbelto» a las columnas expresa un posible temor a que se pueda producir pandeo bajo una carga de compresión axial. Este comportamiento, que a los constructores antiguos debió de parecerles evidente, se puede explorar numéricamente con un análisis actual y, sin duda, es un área en la que los cálculos estructurales modernos se pueden aplicar a la obra de fábrica. La simple determinación de la carga de pandeo de Euler ayuda a definir más rigurosamente los conceptos de robusto y esbelto.

Para hacer los cálculos es necesario tomar un valor para el módulo de Young. Este valor no es solamente una propiedad de la piedra que forma la estructura; un pilar de fábrica gótico se construye (como se indica más adelante) con piedras labradas por sus caras exteriores, pero su interior puede estar relleno de piedras irregulares y cantidades desconocidas de mortero. Teniendo esto en cuenta, y para hacer unos cálculos razonablemente conservadores, se debe adoptar un valor del módulo de elasticidad bajo, por ejemplo $E = 20$ kN/mm^2. La tensión de rotura se puede basar con más fiabilidad solo en las propiedades de la piedra: si es necesario, el débil mortero cederá hasta que las piedras se soporten unas a otras. Un valor razonable de tensión de rotura para la piedra caliza es

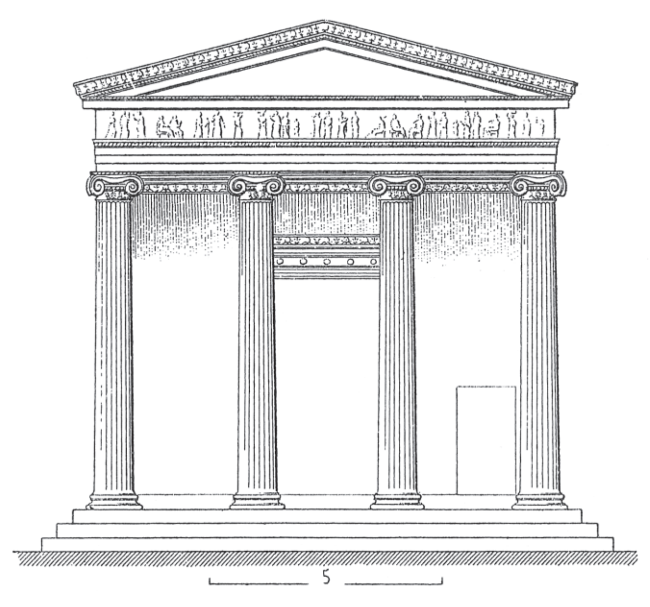


Figura 20.2
El Erecteion (Choisy 1899)

σ_0 = 30 N/mm^2 , aunque su valor fluctúa mucho; la arenisca normalmente es más resistente.

La tensión de pandeo de Euler para una columna articulada en sus extremos es $\sigma_E = \pi^2 E/s^2$, donde s es la «esbeltez mecánica». Para una columna de sección circular de longitud l y diámetro d, $s = 4l/d$. Por tanto, para una columna gótica (o jónica) con l/d = 10, con el valor anterior de E, resulta σ_E = 123 N/mm^2, un valor mucho mayor que la tensión de rotura de 30 N/mm^2. La conclusión es que una columna «estándar» como esta es realmente robusta y fallará por aplastamiento antes de que pandee. Más aún, los cálculos se han efectuado para una columna «articulada en sus extremos», mientras que los extremos de las columnas de la figura 20.1 están claramente coartados; las columnas con extremos empotrados pandean con una tensión 4 veces mayor de la calculada aquí.

Como asunto de interés, una columna de sección circular con articulaciones en sus extremos y del mismo material tendrá una tensión de pandeo igual a la de rotura cuando s = 81, es decir, para un cociente l/d mayor de 20. Los romanos desarrollaron la (cara) tecnología de hacer monolíticas las columnas circulares y esta técnica se recuperó en el gótico —que es donde se pueden encontrar este tipo de columnas esbeltas— pero no en posiciones importantes como las de las arcadas principales de la nave o de la cabecera (se pueden ver ejemplos de columnas «góticas» con un amplio rango de proporciones de esbeltez en la catedral de St John, en Brisbane, Australia. Esta catedral, proyectada por John Loughborough Pearson y por su hijo Frank Pearson en la década de 1890, está ahora a punto de finalizarse. Es una hermosa exhibición, rigurosa y académica, de ejemplos de arquitecturas comprendidas entre el primer gótico y el florecimiento pleno del estilo).

Los pilares del crucero

Los cuatro pilares del crucero de una catedral, que soportan el peso de la torre, son los elementos sometidos a mayor tensión en una iglesia de fábrica. Por ejemplo, los pilares de la catedral de Worcester, de aproximadamente 2,3 m de lado y 11 m de altura, por tanto con una relación entre altura y ancho de alrededor de 5, soportan la torre de 6.000 toneladas. La tensión media resultante en los pilares de 2,8 N/mm^2 se encuentra (aceptablemente) por debajo del 10 por ciento de la tensión de rotura de la arenisca. Sin embargo, las superficies de los pilares se han visto cubiertas con (literalmente) cientos de grietas verticales de hasta varios centímetros de longitud. Es más, estas grietas, monitorizadas cuidadosamente durante un período de 15 años desde 1974, seguían avanzando progresivamente.

La razón del problema era evidente y fue confirmada por endoscopia en unas perforaciones de prueba. Los pilares, aunque se habían aumentado de tamaño para soportar el peso de la torre, respondían al modo de construcción gótico habitual: un revestimiento de buenos sillares que encierra un núcleo de mampostería y mortero. Las perforaciones confirmaron que en los núcleos había muchos vacíos en los que el mortero se había degradado; los pilares eran, en efecto, unos tubos huecos con un espesor de pared que en algunas secciones era de sólo 100 mm. Tomando este valor (de forma pesimista) como el espesor medio de la pared, el área efectiva de los pilares se reduce de 5,29 m^2 a 0,88 m^2, y las tensiones de compresión correspondientes se elevan hasta unos 17 N/mm^2, ahora ya una buena porción de la tensión de rotura de la arenisca (se descarta el pandeo; la tensión de pandeo de Euler para un tubo redondo hueco de pared fina es el doble que la de la misma sección maciza, y el pandeo local se produce bajo tensiones muy elevadas).

La situación de Worcester recuerda el problema observado durante la construcción de la iglesia de Santa Genoveva (el Panteón) de París en la segunda mitad del siglo XVII (Heyman 1985). En aquel caso las piedras habían sido talladas deliberadamente para dejar una zona portante en los bordes de 4 pulgadas de espesor (100 mm), con el interior rehundido; esto se hacía para dejar entre los sillares unas elegantes juntas muy delgadas (3 mm), aunque sobrecargadas, lo que condujo a un tipo de agrietamiento como el de Worcester (y, ocasionalmente, a desportilladuras superficiales en forma de cuñas triangulares). La aparición de grietas por tracción debidas a cargas verticales de compresión se explica fácilmente con la teoría de la elasticidad y, de hecho es el fundamento de los ensayos de probetas cilíndricas de hormigón utilizados en el control de la resistencia del hormigón en las construcciones modernas.

La asombrosa operación de reparación en el Panteón consistió en la perforación de las juntas de 3 mm para permitir la introducción de mortero en los

vacíos internos de los pilares. En Worcester también se restituyó la resistencia inicial de los pilares; una primera operación sencilla consistió en el relleno completo de los vacíos en la fábrica utilizando un cemento PFA con una resistencia nominal de 22 N/mm². Una actuación final más compleja aportó resistencia a tracción horizontal al interior de los pilares. Esto se consiguió perforando una gran cantidad de agujeros de 20 mm de diámetro formando una retícula cuadrada de 300 × 300 mm en toda la altura de cada uno de los cuatro pilares, e insertando una barra de acero de 10 mm en cada perforación. Cada barra era de aproximadamente 1,2 m de longitud (es decir, sobrepasaba el centro del pilar), y finalmente, las barras se inyectaron con resina. Siempre que fue posible, las perforaciones se ubicaron cuidadosamente en las juntas entre sillares, y el trabajo se realizó con tal cuidado (por el contratista especializado Fondedile) que hoy en día es prácticamente imposible percibir el rastro de esta reparación, a pesar de que se perforaron en total 3.400 agujeros.

Un problema similar apareció en los pilares del crucero de la catedral de Milán (Ferrari da Pasano 1993). La figura 20.3 muestra la sección de un pilar típico; la «piel» exterior es de mármol de Candoglia y el núcleo, de ladrillo, piezas irregulares de granito y mortero. Fue esta piel de mármol la que presentó problemas (como en Worcester) y la resistencia de los pilares se restableció con otra impresionante operación entre 1981 y 1984; todo el revestimiento se renovó in situ. Primero se colocaron elementos verticales de acero alrededor de cada pilar y después se fijaron a la fábrica con un conjunto de anillos horizontales de acero. Una vez estabilizados de este modo los pilares, se realizaron cortes en forma de cuña para retirar los sillares dañados (hilada a hilada, de arriba abajo) y se colocó piedra de buena calidad. En algunos casos las piezas en forma de «trozo de tarta» se prolongan hasta el centro de un pilar, atravesando el núcleo de mampostería.

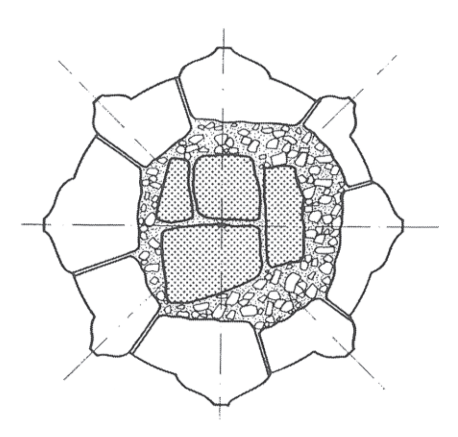


Figura 20.3
Catedral de Milán. Sección de un pilar del crucero (Ferrari da Pasano 1993)

Columnillas

En contraste con el gran diámetro de los pilares principales (1–3 m), en las iglesias góticas se encuentran muchos ejemplos de esbeltas columnillas (*colonnettes*), con diámetros de menos de 200 mm. En la ampliación del coro de la catedral de Ely de 1240, por ejemplo, hay 264 columnillas de este tipo, con cocientes l/d superiores a 20. Al nivel del triforio se encuentran conjuntos portantes (formados por cuatro columnillas), con una longitud de 2.750 mm y 130 mm de diámetro, mientras que al nivel del cuerpo de luces las dimensiones habituales son 2.500 × 110 mm. Estas últimas son decorativas y se agrupan rodeando los pilares de caliza que transmiten la carga.

Todas estas columnillas se hicieron como monolitos de «mármol» Purbeck, un material de moda en Inglaterra a finales del siglo XII y principios del XIII. La piedra varía de color, del verde al gris, y se puede pulir con facilidad; en realidad no se trata de un mármol sino del resultado de la fosilización de los caparazones de unos pequeños caracoles, *Vivipara carinifera,* que se depositaron formando estratos en los fondos de las aguas dulces en la isla de Purbeck, al sur de Inglaterra. Los estratos no sobrepasan los 400 mm de espesor y algunos son todavía más delgados, de manera que los lechos de cantera en una columnilla de 2 m, estaban originalmente horizontales; las columnillas están a contralecho y esta disposición las hace, por tanto, potencialmente débiles.

Cada una de las pequeñas columnas (2.570 × 130 mm) del triforio de Ely, considerándolas articuladas en sus extremos, pandearía a unos 28 N/mm², (a comparar con una tensión de rotura de unos 40 N/mm²), o con una carga de aproximadamente 36 toneladas, que excede ampliamente la de la cuarta parte de la arcada de fábrica que debe soportar.

Las pequeñas columnas decorativas de Ely apenas soportan carga. No se conoce la secuencia de la construcción, pero era una práctica habitual rematar primero los pilares que transmitían la carga y esperar más de un año (para permitir la retracción del mortero) antes de construir las columnillas. Aunque pueda haber sido así, las columnillas de Ely están «tensas» y «cantan» cuando se las golpea con la palma de la mano o con un martillo blando. La frecuencia de vibración de la columna se puede determinar fácilmente (Heyman 1997), y las columnillas de 2.750 × 130 mm, considerándolas articuladas en sus extremos (con las mismas constantes del material utilizadas anteriormente), tendrían una frecuencia fundamental de aproximadamente 21 Hz (ó 48 Hz si se consideran empotradas), que son las notas bajas que se pueden encontrar en un piano de cola.

21
La curvatura del estilóbato

La primera publicación de Choisy, escrita en 1865 cuando tenía 24 años, trataba sobre la curvatura del estilóbato. Su obra *Études epigraphiques sur l'architecture grecque* se publicó entre 1883 y 1884 y estaba formada por cuatro estudios específicos —sobre la arquitectura griega no escribió un estudio profundo comparable a *L'art de bâtir chez les Romains* (1873), *L'art de bâtir chez les Byzantins* (1883) y *L'art de bâtir chez les Égyptiens* (1904). Todos ellos eran verdaderos tratados de arquitectura realizados por un ingeniero, mientras que sus estudios estructurales sobre la arquitectura griega son sólo una parte de su obra más amplia *Histoire de l'architecture* (1899) y de los comentarios a su traducción de Vitruvio (1909–10).

Según Vitruvio, el estilóbato, la plataforma sobre la que se elevan los templos griegos, tiene que ser cupuliforme y explica la manera de obtener la forma adecuada haciendo uso de los que llama *scamilli impares*. En el parrafo 5 del capítulo 4 del libro III (III, 4, 5) dice:

> Stylobatam ita oportet exaequari, uti habeat per medium adjectionem per scamillos impares; si enim ad libellam divigitur, alveolatum oculo videvitur. Hoc autem, ut scamilli ad id convenientes fiant, item in extremo libro forma et demonstratio erit descripta.

Según la traducción de Morgan (1914):

> El nivel del estilóbato debe crecer hacia su mitad mediante scamilli impares; puesto que si se hace perfectamente plano, parecerá a la vista como si fuera un poco cóncavo. Al final del libro se encontrará un figura con una descripción que muestra cómo usar los scamilli para este propósito.

Es evidente que a Vitruvio le resultaba difícil describir con palabras el procedimiento a seguir; por desgracia, no se conserva copia de la figura de la que habla. Por otra parte, el hecho de que los estilóbatos (por ejemplo, el del Partenón) eran realmente curvos no se comprobó hasta mediados del siglo XIX y, como ha señalado Gros (1990), las explicaciones sobre el significado de *scamillus* varían según se hayan escrito antes o después de esa comprobación.

En primer lugar, la naturaleza de la curvatura no está clara. La idea de que el perfil fuese parabólico fue propuesta por Choisy (1909–10), y se discute en detalle más adelante. El Partenón (que se utilizará en este artículo para hacer comprobaciones numéricas) se construyó entre los años 447 y 438 a. C., mientras que el descubrimiento de las secciones cónicas se atribuye generalmente a Menaechmus hacia el 350 a. C.; por tanto, es posible que los arquitectos griegos del Partenón (Ictinio y Calícrates) no conociesen la parábola. Otros autores han supuesto que la curvatura es la de un gran arco de circunferencia

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The curvature of the stylobate». En: *Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir,* ed. por F. J. Girón y S. Huerta. (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2009): 277–288. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

—Dinsmoor (1950) da un radio de unas 3 ½ millas (esto es, de unos 5,5 km, que se comenta más adelante). Por otra parte, Robertson (1943) afirma que aunque el estilóbato es cupuliforme, no está realmente curvado, sino que «consiste en una sucesión de líneas rectas, parte del perímetro de un enorme polígono irregular».

En segundo lugar, se han debatido las razones de la curvatura. Vitruvio es claro: se trata de corregir la ilusión óptica que se produciría si la plataforma se construyese perfectamente plana. Prácticamente todos los autores aceptan esta explicación (aunque muchos mencionan la ventaja evidente que supone para facilitar la evacuación de agua, tanto de lluvia como de la limpieza); Choisy trata en profundidad los aspectos técnicos de ésta y otras correcciones ópticas tanto en su *Histoire* como en sus comentarios sobre Vitruvio.

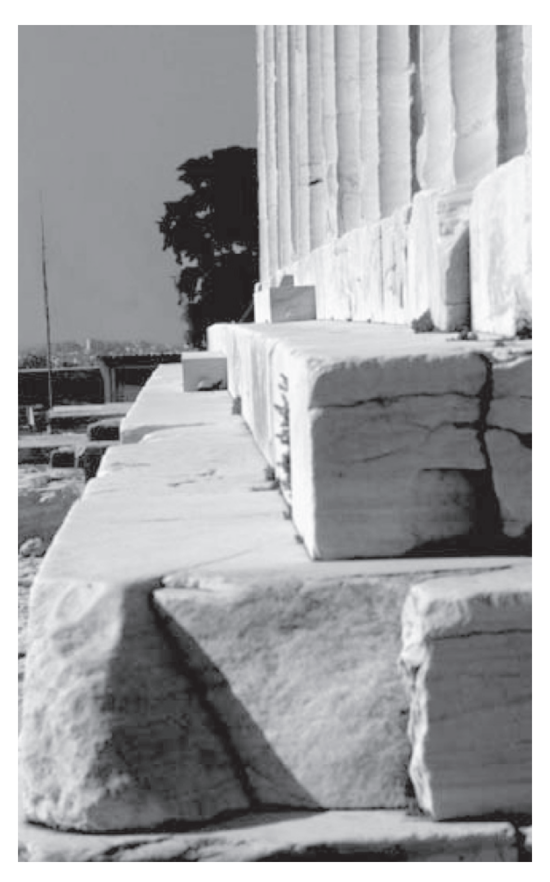


Figura 21.1
La curvatura del estilóbato

Por último, los *scamilli* son un elemento necesario para controlar el proceso de construcción de la curvatura. En latín *scammum* significa banco o taburete, y los *scamilli* son pequeños taburetes; Gros da la traducción *petites banquettes*. De ahí que se pueda pensar que los *scamilli* son unos bloques delgados (calzos o separadores, posiblemente de madera), esto es, piezas de diferentes (*impares*) espesores. También se puede imaginar que su significado es más abstracto, que se refiere a un conjunto de números (diferentes) que definen la desviación del estilóbato respecto a una superficie plana. Choisy lo traduce por *échelons à imparité* (escalones desiguales), que da idea de una cierta secuencia progresiva. Puede ser relevante que el término «bench» (banco o bancada) se conserva en inglés para referirse a una superficie horizontal de fábrica.

Correcciones ópticas

En el mismo capítulo 4 del libro III Vitruvio describe otras correcciones sutiles, que se hicieron en la arquitectura griega para rectificar distintas ilusiones ópticas; algunas de estas correcciones son de un orden de magnitud diferente del ligero «moldeado» del estilóbato. Dinsmoor da las dimensiones del estilóbato del Partenón con una precisión que no es creíble: 228 pies $^{3}/_{8}$ de pulgada por 100 pies 3 ¾ de pulgada (69,504 m por 30,880 m), esto es con una precisión implícita de $^{1}/_{8}$ de pulgada (3 mm). Las diferencias de nivel entre el centro y los extremos son de 4 $^{5}/_{16}$ de pulgada y 2 $^{3}/_{8}$ de pulgada (109,5 mm y 60,3 mm) en las direcciones longitudinal y transversal respectivamente. Las desviaciones de la superficie plana son, por tanto, del orden de una parte entre 500 ó 600.

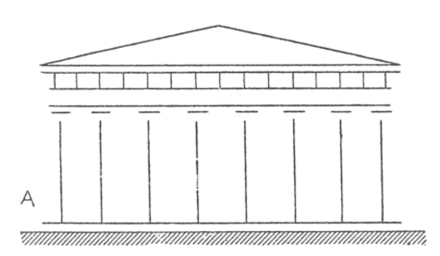
En contraste, la disminución de la base al capitel de una columna dórica debe ser, según Vitruvio (III, 3, 11), de alrededor de un sexto del diámetro en una altura de diez diámetros (la relación exacta depende de las dimensiones precisas de las columnas), es decir de una parte entre 60; la pendiente de la cara de una columna es de 1/120.

Inmediatamente después de esta regla, Vitruvio trata en III, 3, 12 la variación de espesor de las columnas («lo que los griegos denominan éntasis»), dando al final una ilustración y algunos cálculos;

como en el caso de los *scamilli*, esta ilustración se ha perdido. El objeto del éntasis de las columnas es «corregir el efecto óptico de concavidad que se produciría si las generatrices fuesen rectas» (Dinsmoor). Esto coincide exactamente con la visión de Vitruvio de la curvatura del estilóbato, y las medidas de las columnas existentes confirman que las correcciones ópticas son del mismo orden; en las columnas del Partenón el incremento de diámetro es de unos 20 mm para una columna de 10 m, lo que supone una relación de uno a 500.

En las columnas de las esquinas del templo es preciso realizar otra corrección, «ya que se recortan contra el cielo y parecerían más esbeltas de lo que en realidad son». Según Vitruvio (III, 3, 11) el diámetro de estas columnas debe aumentarse en un cincuentavo.

En III, 5, 4 Vitruvio afirma que las columnas de los pórticos frontal y trasero deben tener sus ejes verticales, pero las de los extremos, y todas las de los laterales del templo tienen que estar inclinadas hacia dentro con una ángulo tal que la arista interior de esas columnas (que tiene diámetro variable) sea vertical.



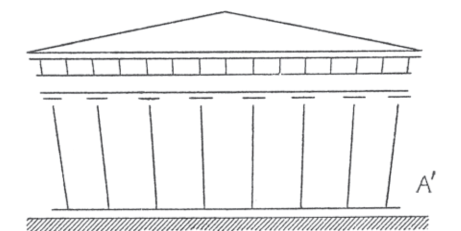
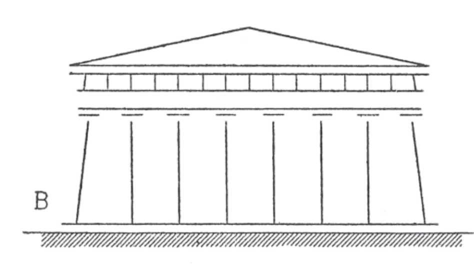


Figura 21.2
Ilusiones ópticas (Choisy 1899)



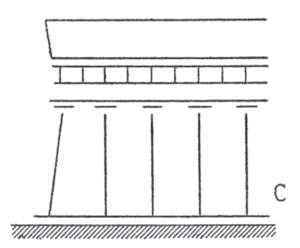
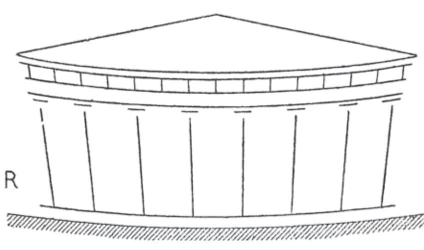


Figura 21.3
Correcciones constructivas (Choisy 1899)



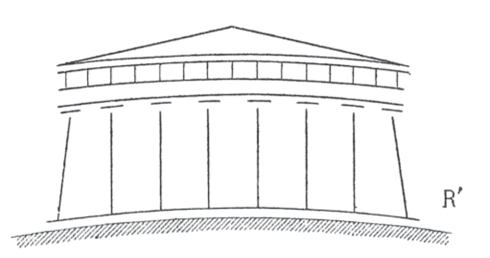


Figura 21.4
De Choisy 1899

Choisy estudia esta cuestión en su *Histoire*. En la parte izquierda de la figura 21.2 muestra una templo con las columnas verticales y afirma que un observador las vería separarse en forma de abanico, como muestra en el esquema de la derecha. En la figura 21.3 Choisy muestra las «correcciones» realizadas por los griegos, y en la figura 21.4, en la que incluye la curvatura del estilóbato, el efecto aparece más evidente (todas las correcciones se han exagerado). En las figuras 21.5 y 21.6 (del *Vitruve* de Choisy) se detallan estas sutilezas en la construcción cuyo efecto debería ser independiente de la posición del observador. Vitruvio recomienda otra corrección geométrica cuyo objetivo sería evitar la ilusión óptica que tendría un observador próximo al frente del templo. En concreto se refiere al frontón triangular situado en la fachada sobre las columnas (III, 5, 13); si fuese vertical, al observador le parecería que está inclinado hacia atrás, y para evitarlo debería inclinarse hacia adelante con una pendiente de un doceavo. En el esquema derecho de la figura 21.3 de Choisy se puede ver la inclinación del frontón.

Los *scamilli impares*

El término latino *impar* puede significar desigual o puede referirse a una cantidad impar (en francés *impair*). Tanto Choisy como Gros escriben *inpar* en la transcripción de los textos latinos, pero Choisy utiliza el término menos pedante *impar* en sus comentarios).

Es posible que se utilizasen bloques delgados, *scamilli*, para generar la curvatura del estilóbato, pero también se pueden entender de un modo más abstracto, como unidades de un sistema de medida. Choisy muestra cómo se pueden utilizar para trazar una parábola, mediante un sistema sencillo e ingenioso (modestamente lo atribuye a un tal Aurès). Más adelante explica la manera de realizar la construcción geométrica, pero hay que señalar que la forma del estilóbato es, de hecho, parabólica, si tenemos en cuenta que, para las dimensiones del Partenón, una circunferencia y una parábola se separan mucho menos de 1 milímetro. Dicho de otro modo y con las dimensiones que se han indicado, si la forma del estilóbato fuese circular, el radio sería de 5.514,6 m (donde al menos las dos últimas cifras no son significativas). Si

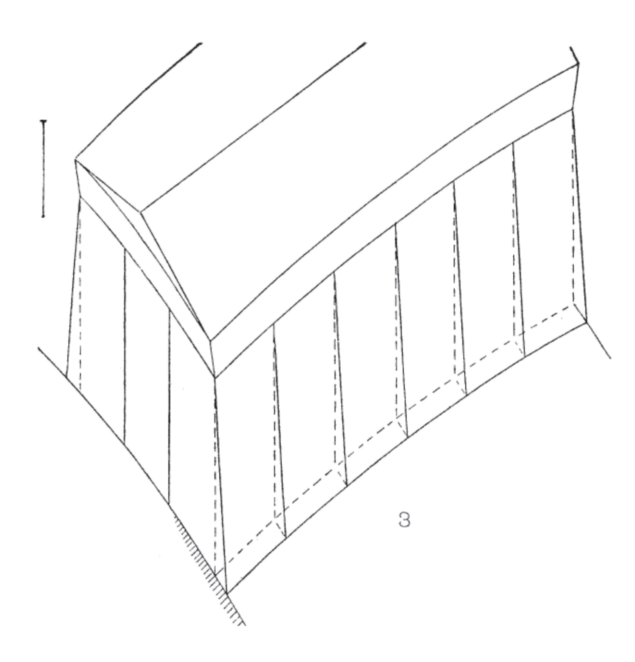


Figura 21.5
De Choisy 1909-10

la forma del estilóbato fuese parabólica, el radio de curvatura en la clave sería de 5.514,7 m, y en el extremo de 5.515,3 m. Del mismo modo, una catenaria no se distinguiría de una arco de circunferencia ni de una parábola para la escasa diferencia de nivel entre el centro y los extremos del estilóbato del Partenón (una sugerencia interesante para explicar el perfil del estilóbato es la de pensar que coincide con la forma invertida de una cuerda suspendida entre los extremos, entendiendo los *scamilli* como la distancia vertical de la cuerda a la horizontal a una serie de intervalos regulares).

Según Rowland y Howe (1999) los *scamilli* son separadores, como lo muestran en la figura 21.7, en donde se pueden ver dos maneras distintas en las que se pudo haber construido el estilóbato. Por la proporción de la figura, el estilóbato es pequeño; si se aplica al Partenón, habría que reducir las distancias verticales dividiendo por un factor en torno a 15. Los niveles se podían obtener con precisión suficiente utilizando algún instrumento óptico como el corobates que Vitruvio describe en VIII, 5, 1, pero se podría haber obtenido la precisión necesaria con una sencilla mira como la que se muestra en la figura 21.7.

Los romanos consiguieron pendientes increíblemente pequeñas en la construcción de acueductos de varios kilómetros de longitud, en esos casos resulta habitual una pendiente de 1/1.000, llegando en ocasiones a 1/10.000. Vitruvio, en VII, 6, 1, afirma que un acueducto debe tener una pendiente de 1/200 (Rowland y Howe), pero Choisy afirma que debe ser 1/4.800. Rowland y Howe llaman la atención sobre la dificultad de la interpretación de los manuscritos; *sicilicus* significaría una pendiente de ¼ de pulgada de caída en 100 pies de longitud, mientras que *semipede* proporcionaría ½ pie en 100 pies. Cualquiera que sea la interpretación correcta, lo cierto es que los romanos no habrían tenido problemas para trazar el Partenón, y la ingeniería romana es heredera de los griegos, que construyeron acueductos desde el año 700 a. C. La idea sugerida en la figura 21.7 de que se puede construir una superficie curva con precisión utilizando medios ópticos está plenamente justificada. (Hace algunos años, el autor pudo medir fácilmente la curvatura de la fachada oeste de la catedral de Peterborough. En el nivel de la cubierta, justo detrás de la fábrica, hay un pasillo que recorre todo el ancho de la catedral; con un rayo láser dirigido a lo largo del pasillo, se midió la separación con un escalímetro en pocos minutos.)

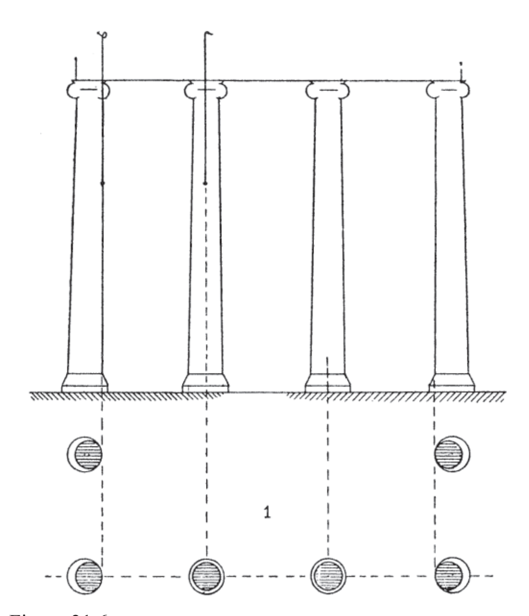


Figura 21.6
De Choisy 1909-10

Todo lo que sigue no es más que una serie de hipótesis, que pueden considerarse como malabares algebraicos. Los *scamilli* son «unidades», bien separadores físicos como los que se muestran en la figura 21.7, o bien unidades de medida. Suponiendo que son bloques de madera o de piedra, se puede considerar que todos los bloques tienen el mismo tamaño y para obtener una determinada medida se superponen los *scamilli* necesarios para obtener la dimensión necesaria. En la figura 21.8 tomada de Dinsmoor (a partir de Choisy) se muestra como se puede generar una parábola utilizando estas medidas.

La mitad del estilóbato se divide en un número de partes iguales (en la figura 21,8 se han tomado ocho). En la primera división desde el vértice de la curva, la parábola tiene una ordenada de un *scamilli* por debajo de la horizontal. En la segunda división, se añaden otros tres *scamilli* para obtener los cuatro de distancia entre la parábola y la horizontal; añadiendo 5 *scamilli* se tiene los 9 necesarios en la tercera división y así sucesivamente. La distancia en vertical aumenta progresivamente según la serie 1, 3, 5, 7 … *scamilli*. Como afirma Choisy: «obtenemos una curva cuya ordenada va aumentando mediante incrementos desiguales de *scamilli*, y estos incrementos se pueden expresar mediante números impares 1, 3, 5, 7 … Con

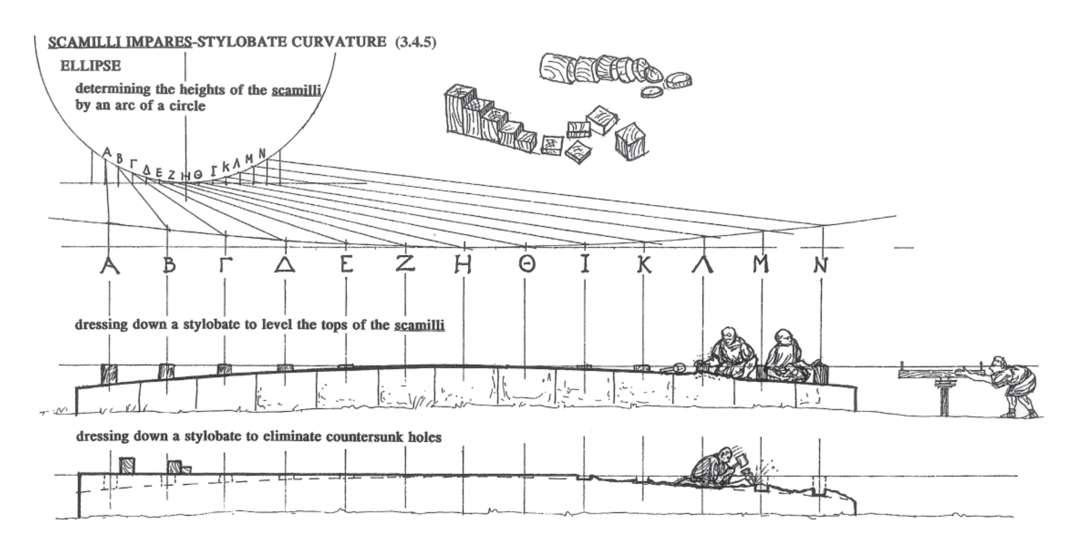


Figura 21.7
Construyendo el estilóbato (Rowland y Howe)

Figura 21.8
La parábola (Dinsmoor a partir de Choisy)

lo que el término *impares* puede admitir la traducción de impar o de desigual».

La curva del estilóbato del Partenón se puede realizar mediante la construcción de la figura 21.8 con las dimensiones que se indican en la primera línea de la tabla 21.1. En la dirección larga del estilóbato, la distancia en vertical entre el punto central más elevado y los extremos es de 109,5 mm; si se divide la mitad de la longitud total, 34.752 mm, en 8 partes iguales, entonces se puede realizar la parábola mediante *scamilli* de 1,71 mm de espesor (siendo en este caso la unidad de medida 1,71 mm). (Por supuesto, todas estas medidas tienen un grado de precisión absurdo.)

Alternativamente, si la longitud de medio estilóbato se divide en 7 partes iguales, en la segunda línea de la tabla 21.1 se puede ver que el *scamilli* es de 2,23 mm, y así sucesivamente hasta la última línea en la que se puede ver que si se divide en 4 partes el *scamilli* es de 6,84 mm.

Toda la discusión anterior se refiere a dos dimensiones, pero el estilóbato está curvado en dos direcciones ortogonales; la superficie no se corresponde con una parábola (ni con cualquier otra curva casi idéntica) sino con un paraboloide elíptico (u otra superficie similar). Repitiendo el mismo análisis anterior a lo largo de la línea central del estilóbato en la dirección corta, la diferencia de nivel entre el centro y el extremo de 60,3 mm tiene que poder obtenerse con un número entero de *scamilli*. En la tabla 21.1 aparecen dos cantidades similares a 60,3: en la primera y en la última fila aparece el valor 61,6. Si la parábola transversal se realiza apoyándose en 6 divisiones, para un desnivel de 60,3 mm harían falta unos *scamilli* de 1,68 mm; si se utilizan únicamente 3 divisiones, entonces los *scamilli* deberían tener un espesor de 6,70 mm.

En la figura 21.9 se muestra un esquema de un cuarto de estilóbato del Partenón, realizado a partir de los datos de la última línea de la tabla 21.1. Los números representan la cantidad de *scamilli* necesarios en cada nodo para asegurar que la superficie sigue la forma de una parábola tanto en la dirección longitudinal como transversal. Si cada *scamillus* es de un espesor de 6,84 mm, se puede reproducir la forma del estilóbato del Partenón con bastante precisión.

La gran medida

Por razones prácticas se puede justificar la conclusión de que el espesor del *scamillus* es de 6,84 mm, obtenido con argumentos numéricos. Suponiendo que los *scamilli* fuesen piezas materiales más que unidades de medida, entonces una pieza (de madera o piedra) de 1,71 mm de espesor sería demasiado pequeña para manejarse en una obra; más aún pensando que hubiesen sido necesarias 100 de esas piezas en los extremos del estilóbato del Partenón (compárese con la cantidad de *scamilli* de 6,84 mm de la figura 21.9). De la tabla 21.1, estos dos espesores parecen los únicos razonables, ya que mediante múltiplos enteros se pueden obtener los desniveles de 109,5 mm y 61,6 mm de las dos direcciones longitudinal y transversal.

Estos razonamientos numéricos pueden haber resultado poco claros por el empleo del sistema métrico. Desde los tiempos de Ezequiel (siglo VI a.C.) pasando por Vitruvio e incluso hasta la época gótica, los edificios se trazaban con una gran medida, una pértiga de madera definida al principio de la obra que tenía una longitud dada. La medida se subdividía en palmos, de-

Número de *scamilli*		0	1	4	9	16	25	36	49	64
Espesor:	1,71 mm	0	1,7	6,8	15,4	27,4	42,8	61,6	83,8	109,5
	2,23	0	2,2	8,9	20,1	35,8	55,9	80,4	109,5	
	3,04	0	3,0	12,2	27,4	48,7	76,0	109,5		
	4,38	0	4,4	17,5	39,4	70,1	109,5			
	6,84	0	6,8	27,4	61,6	109,5				

Tabla 21.1
Dimensiones de la curvatura del Partenón, según la figura 21.8

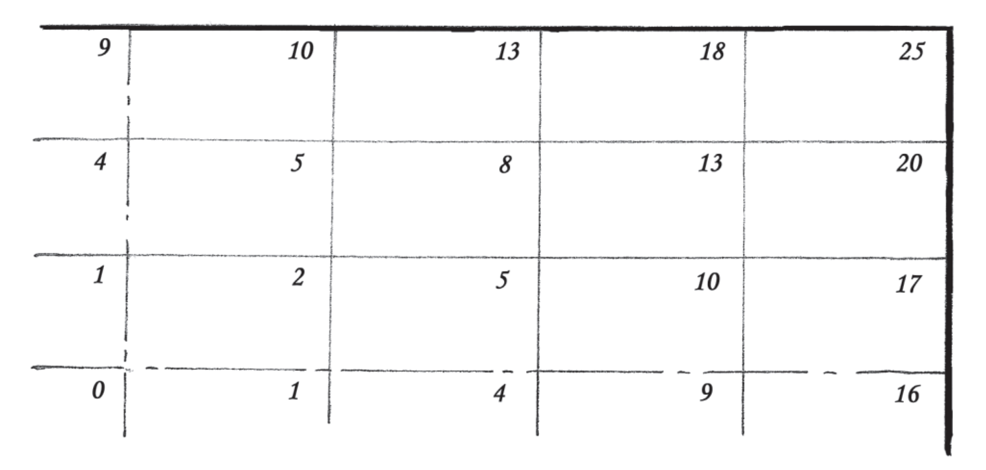


Figura 21.9
Cotas del descenso del estilóbato; se indica el número de *scamilli* en cada nudo.

dos, etc., de modo que todas esas cantidades eran divisiones enteras del todo. Una de las medidas que se obtenía mediante esa división en tiempos de Vitruvio (y anteriormente en la Grecia del siglo IV a.C.) era el pie. La longitud del pie romano era más o menos regular y tenía 296 mm (compárese con los 304,8 mm en el caso del pie imperial inglés); el pie griego medía también 296 mm, aunque hay algunas variaciones importantes (como los 333 mm en Egina).

Mediante divisiones enteras se obtenían otras medidas más pequeñas; un pie romano se dividía en 16 dedos. Los romanos también utilizaban la pulgada —la *uncia* era la doceava parte de un pie, esto es 24,7 mm. Para poder definir la curvatura del estilóbato, la pulgada es una medida poco precisa, para ello es necesario realizar más divisiones enteras (es la única forma posible), media pulgada y un cuarto de pulgada. El cuarto de pulgada, el *sicilicus*, resulta de dividir el pie por 48 y, de acuerdo con lo indicado en la última línea de la tabla 21.1, parece claro que el *scamillus* (suponiendo que fuesen separadores) tiene el espesor de un *sicilicus*; pensando que los *scamilli* fuesen dimensiones, entonces serían *sicilici* que, utilizados en cantidades impares e incrementadas de manera desigual permitían definir la forma del estilóbato. La última línea de la tabla 21.1 se puede escribir como se resume en la tabla 21.2.

Conviene recordar que las dimensiones que da Dinsmoor para el desnivel del estilóbato en las direcciones longitudinal y transversal están expresadas en pulgadas imperiales y son de 4 $^{5}/_{16}$ y 2 $^{3}/_{8}$. No sabemos las dimensiones de la pulgada utilizada por Ictinio y Calícrates, pero las cantidades que señala Dinsmoor se parecen bastante a las que aparecen en la tabla 21.2.

Conjeturas

Aunque no hay evidencias que soporten las siguientes afirmaciones, no contradicen los datos que se mencionan en este artículo.

Número de *scamilli* de ¼ pulgada	0	1	4	9	16
Descenso desde la coronación (pulgadas griegas)	0	¼	1	2¼	4

Tabla 21.2
Scamilli empleados en el estilóbato del Partenón

- El término *scamillus* (taburete o asiento) es un error de transcripción (medieval) en lugar de *sicilicus* (un cuarto de pulgada).
- Sea eso cierto o no, y tanto si la curvatura del estilóbato del Partenón se hiciese para corregir efectos ópticos o para facilitar la evacuación de agua, o para ambas cosas a la vez, las pequeñas pero precisas desviaciones de una superficie plana se consiguieron utilizando *scamilli* de un cuarto de pulgada de espesor.
- Los constructores griegos y romanos eran capaces de conseguir gran precisión utilizando niveles ópticos (como se puede ver en los acueductos). En el Partenón se utilizó un nivel con marcas de ¼ de pulgada; el trazado del estilóbato se realizó superponiendo estos *scamilli* haciendo uso de los *sicilici impares*.

22
La coupe des pierres

El subtítulo de la monumental obra de Becchi y Foce (2002) sobre arcos y bóvedas de fábrica se puede traducir como «mecánica y estereotomía en el arte de construir». Becchi deja claro que el término «estereotomía» se refiere a algo más que al «corte de las piedras», y cita a Frézier (1737–9): «El significado de las palabras *la coupe des pierres* no es el primero que nos viene a la cabeza; no sólo describen la labor del artesano que labra la piedra, sino que también se refiere a la ciencia del matemático, que le ha dirigido durante el proyecto de la bóveda o de otro elemento de cualquier forma construido mediante el ensamble de muchas piezas más pequeñas». Se trata de la manera de hacer las juntas entre esas pequeñas piezas de piedra.

El problema no parece haber surgido con el arco de medio punto romano o, al menos, no parece que Vitruvio lo haya considerado digno de mención. Parecía «evidente» que las juntas entre las dovelas de un arco de este tipo deberían ser radiales y dirigidas al mismo centro —en inglés se utiliza el término «centering» (de «center», centro) para designar la cimbra necesaria para construirlo. En un arco semicircular con juntas radiales, todas las dovelas tienen idéntica forma de cuña; las juntas son perpendiculares a las piedras tanto en el trasdós como en el intradós, y quizá se podría haber pensado que todas la dovelas, que tienen la misma forma, trabajaban del mismo modo.

Resulta difícil imaginar con exactitud lo que tenían en mente los artesanos; el concepto de fuerza, y particularmente el de fuerza inclinada, es complejo. Ciertamente, incluso pensando que disponer las juntas en dirección perpendicular a la fábrica era una solución adecuada, surge inmediatamente un problema cuando el trasdós y el intradós ya no son círculos concéntricos —no se podía construir una junta plana perpendicular a ambas superficies. Haría falta considerar no sólo cuestiones geométricas —quizá un matemático podría dar alguna orientación sobre cómo se soportan unas piedras sobre otras en el arco, que pudiera servir de guía para la «estereotomía».

De hecho, incluso en un sencillo arco semicircular, no todas las dovelas trabajan del mismo modo; la forma de la línea de empujes (como se verá el concepto de «línea de empujes» debe utilizarse con precaución) no es semicircular, sino que puede pensarse que adopta la forma de la cadena invertida propuesta por Hooke, que corta las juntas con ángulos distintos y en diferentes puntos a lo largo del arco. Por tanto, puede suceder que las juntas radiales no sean la «mejor» solución para un arco semicircular.

Philippe de La Hire (1695) fue uno de los primeros «matemáticos» que estudió los arcos de fábrica; su objetivo era obtener el empuje que un arco produce sobre sus estribos con el fin de poder calcularlos. Parecía evidente que las fuerzas entre las piedras de

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original. «La coupe des pierres». En: *Proceedings of Third International Congress on Construction History.* V. Wetzk et al. eds. (Cottbus: Brandenburg University of Technology, 2009) vol. 2: 807–812. Traducción de Joaquín Antuña Bernardo.

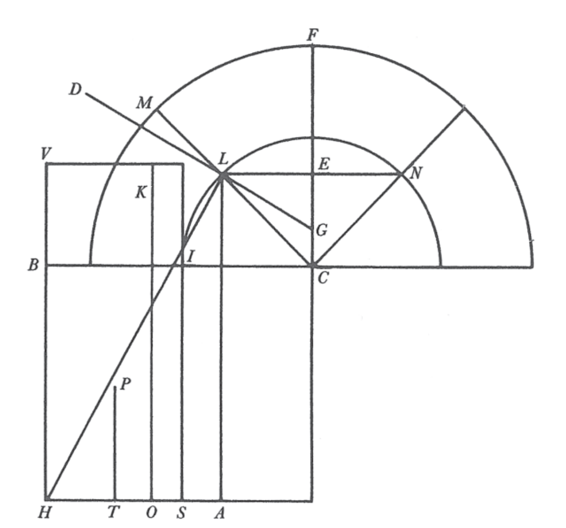


Figura 22.1
Según La Hire (1712)

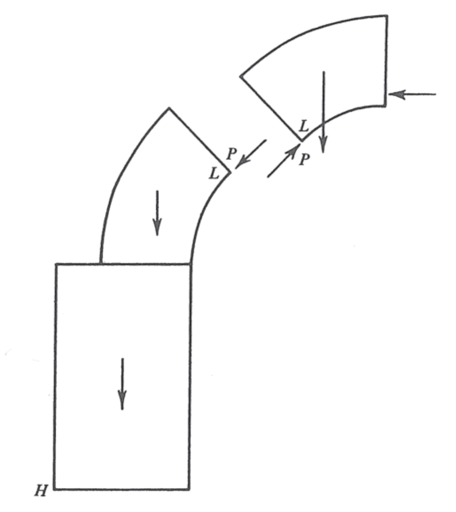


Figura 22.2
Análisis de la figura 22.1

un arco deberían ejercerse en la dirección perpendicular a las juntas —con esta hipótesis, trató de encontrar la forma del arco (deduciendo valiosas herramientas para el análisis de arcos: el polígono de fuerzas y el polígono funicular). Tuvo que admitir (de forma correcta) que no se podía proyectar un arco con esas condiciones, y dejó a un lado el problema durante diecisiete años.

A finales del siglo XVII, el fenómeno del rozamiento era objeto de estudio en la *Académie* —en 1699 Amontons presentó, con demostraciones, su famosa memoria. En el nuevo análisis del arco que La Hire realizó en 1712, abandonó la suposición de que las fuerzas actuasen en dirección perpendicular a las juntas —el rozamiento permitiría que las fuerzas fuesen inclinadas. Con el fin de encontrar la posición de esa fuerza —esto es, localizar la «línea de empujes» y con ello resolver el problema de la estática de los arcos— La Hire observó que cuando los estribos de un arco son demasiado débiles para soportar su empuje, el arco se agrieta en una sección situada en algún lugar entre el arranque y la clave. En la figura 22.1 se considera crítica la junta *LM*; el bloque *LMF* se considera como una dovela única, igual que el *LMI* que descansa sobre el estribo. Por tanto, en la figura 22.2, se puede calcular el empuje *P* considerando el equilibrio del bloque superior, y La Hire supone que el empuje del arco es tangente al intradós en el punto *L*. Esta última suposición parece natural, pero La Hire no hace ningún comentario al respecto, como tampoco da ninguna regla para situar el punto crítico *L*.

Las primeras aportaciones definitivas sobre los arcos de fábrica son las de Couplet de 1729 y 1730. En el primer artículo estudia el comportamiento sin rozamiento, que el mismo Couplet reconoce que no iba a ser de mucha ayuda, pero en el segundo escrito enuncia de modo explícito las hipótesis necesarias para una «correcto» análisis de las fábricas —esto es, que la fábrica no tiene resistencia a tracción (las juntas entre las piedras no pueden transmitir fuerzas de tracción), que tiene, a efectos prácticos, una resistencia a compresión infinita y que no puede producirse el fallo por deslizamiento. De este modo, el rozamiento se incorpora al análisis.

El problema de Couplet

El primer problema que trata Couplet en su segundo artículo («el problema de Couplet») es el de calcular el mínimo espesor (constante) de un arco semicircular que soporta sólo su propio peso. Este arco, dice Couplet, colapsaría dividiéndose en cuatro partes, unidas por «rótulas» como se muestra en la figura

22.3. Considerando el equilibrio del arco en este estado, se puede encontrar una única ecuación que relaciona el espesor del arco con su radio. Couplet llega a una ecuación cúbica y la resuelve obteniendo una relación entre el espesor y el radio medio *t*/*R* igual a 0,101. Couplet no determina la posición correcta de las articulaciones *T* y *K* en el intradós, pero supone que se forman a 45º. Las líneas adicionales en la figura 22.3 representan el equilibrio del bloque *AK*; el empuje en *A* es horizontal y está representado por *AG*, mientras que el peso del bloque pasa por *H* y está representado por *GH*. La fuerza en el punto *K* tiene por tanto que actuar según la línea *GK* que no es tangente al intradós en *K*.

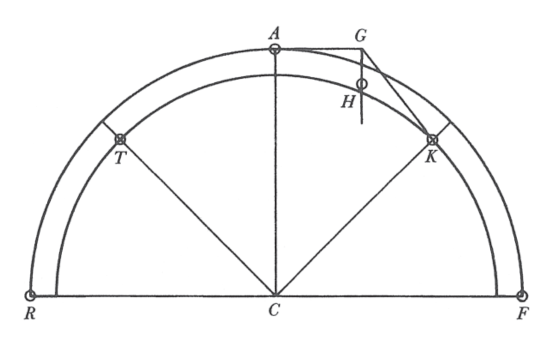
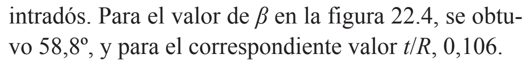


Figura 22.3
Según Couplet (1730)

Heyman «corrigió» el análisis de Couplet en 1969 (ver también Heyman 1972) utilizando el mismo mecanismo de colapso pero (a) obteniendo matemáticamente la posición de las rótulas del intradós y (b) haciendo que la fuerza en estas rótulas fuera tangente al



intradós. Para el valor de β en la figura 22.4, se obtuvo 58,8º, y para el correspondiente valor *t*/*R*, 0,106.

En 2006 Ochsendorf, en un escrito con un objetivo más amplio, muestra que esta solución tiene que ser incorrecta y su análisis da unos valores de β=54,5º y *t*/*R*=0,1075. Los resultados se resumen en la tabla 1.

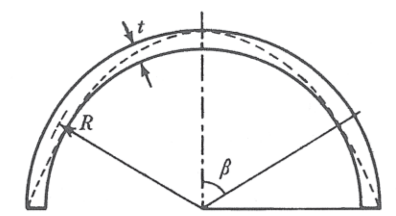
Tabla 1

	β°	*t*/*R*
Couplet 1730	45	0,101
Heyman 1969	58,8	0,106
Ochsendorf 2006	54,5	0,1075

Principios plásticos

Para poder aplicar los teoremas plásticos a una estructura dúctil es necesario que se verifiquen simultáneamente un mecanismo de colapso y un sistema de fuerzas en equilibrio. En una construcción de fábrica, la ductilidad está asegurada por la posibilidad de formación de «rótulas» entre los bloques, y las hipótesis de falta de resistencia a tracción y de infinita resistencia a compresión obligan a que las fuerzas que se transmiten de bloque a bloque, estén contenidas dentro de los límites de la fábrica. Si se estudia un mecanismo aislado, esto lleva a una solución insegura; por tanto, el valor correcto de *t*/*R* tiene que ser, ciertamente, mayor que el valor de 0,101 obtenido por Couplet, que estudió un único mecanismo, del tipo del de la figura 22.4, con β=45º.

Ochsendorf consideró el mismo mecanismo, variando el valor de β hasta obtener el mayor valor de *t*/*R* (0,1075). En el colapso del arco de mínimo espesor



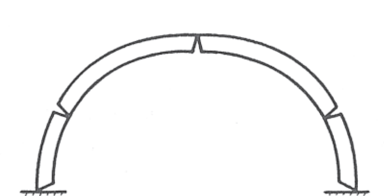


Figura 22.4
Colapso del arco de espesor mínimo

el trabajo realizado para un desplazamiento infinitesimal del mecanismo de la figura 22.4 es nulo, y esto da suficiente información para obtener el valor de t/R para cualquier valor de β. Técnicamente hablando, la solución de Ochsendorf resulta incompleta ya que no estudia el equilibrio del arco completo en la situación de colapso —lo que ha obtenido es la solución «menos insegura» para un mecanismo del tipo del de la figura 22.4. Se trata, de todos modos, de una precisión académica, ya que no es posible otro tipo de mecanismo y la solución de Ochsendorf es ciertamente correcta.

El error en el análisis de Couplet que le lleva al valor t/R=0,101 es doble. En primer lugar, supone que β es 45º y, en segundo lugar, no estudia la seguridad de los bloques *TR* y *KF* (figura 22.3). La dirección del empuje en las rótulas del intradós *T* y *K* podría conducir, muy probablemente, a que las fuerzas se salgan de la fábrica en esos bloques, lo que es inadmisible. El resultado de Couplet es inseguro, puesto que surge de suponer un mecanismo particular de colapso, aunque los cálculos se basan en consideraciones de equilibrio, en vez de escribir la ecuación del trabajo.

El error del autor (1969) parece mas sutil. Supone el mismo mecanismo de colapso (figura 22.4) y el análisis se hizo componiendo fuerzas y tomando momentos —en resumen, satisfaciendo las ecuaciones de equilibrio. Al cumplirse de modo simultáneo las condiciones de equilibrio y de mecanismo, la solución obtenida t/R = 0,106 debería ser correcta, de acuerdo con los principios del cálculo plástico.

Entrando en el detalle del análisis, el bloque del arco entre la clave y el radio β en la figura 22.4 está sometido a la acción de un empuje horizontal en la clave (tangente al trasdós), a un empuje en la rótula del intradós tangente al intradós en la rótula, y al peso propio del bloque. Haciendo el mismo planteamiento en el bloque situado entre la rótula del intradós y el arranque se puede establecer una relación en entre β y t/R. Se verifica la ecuación

$$\beta \cot \beta \left[\frac{2\beta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta + \operatorname{sen} \beta}{2\beta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta} \right] = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

que se puede resolver numéricamente para obtener el valor β=58,8º. El valor correspondiente del espesor se puede calcular a partir de

$$\frac{t}{R} = 2\,\frac{(\beta - \operatorname{sen} \beta)\,(1 - \cos \beta)}{\beta\,(1 + \cos \beta)} \quad (2)$$

esto es, t/R = 0,106.

Dado que este valor de t/R es incorrecto, y como el mecanismo considerado es ciertamente un mecanismo, el análisis de equilibrio debe contener algún error. Las ecuaciones (1) y (2) están, de hecho, bien planteadas —el error está en suponer la dirección del empuje en la rótula del intradós tangente al intradós.

La línea de resistencia y la línea de presiones

En 1839 Moseley propuso las expresiones *line of resistance*, «línea de resistencia», y *line of pressure*, «línea de presiones»; el análisis de estas líneas se incluyó en su libro *Engineering and Architecture* publicado en 1843. Estas ideas habían sido formuladas pocos años antes por Gerstner (1831), pero Moseley las amplió y profundizó. La idea de línea de resistencia es clara y se muestra en el diagrama de Moseley, figura 22.5. Un conjunto de piedras en seco está sometido a la acción de ciertas cargas (incluido el peso propio), y el equilibrio se obtiene mediante empujes (de compresión) que se transmiten de piedra a piedra a través de sus juntas. El empuje resultante entre las dos piedras superiores está aplicado en *a*, entre las dos siguientes en *b*, y así sucesivamente, y la línea (curva) que se obtiene uniendo todos esos puntos se define como la línea de resistencia. Obviamente, si la presencia de tracciones en las juntas es inadmisible, la línea de resistencia no puede salirse de la fábrica. Heyman identificó la «línea de resistencia» con el trazado de la cadena colgante invertida de Hooke, y aplicó el nombre (algo impreciso) de «línea de empujes» a la línea de resistencia. Esto le llevó a cometer el error en su análisis.

La segunda expresión de Moseley, la línea de presiones, es algo más complicada. En la figura 22.5, la fuerza resultante transmitida en *a* no es perpendicular a la junta, y la flecha de la figura representa su dirección. Del mismo modo, en *b*, la resultante actuará según una dirección diferente, y todos estos vectores definen una envolvente que, en general, no coincide con la línea de resistencia. Moseley no utiliza la línea de presiones en el análisis, pero señala que la dirección de los vectores que la generan debe formar con las

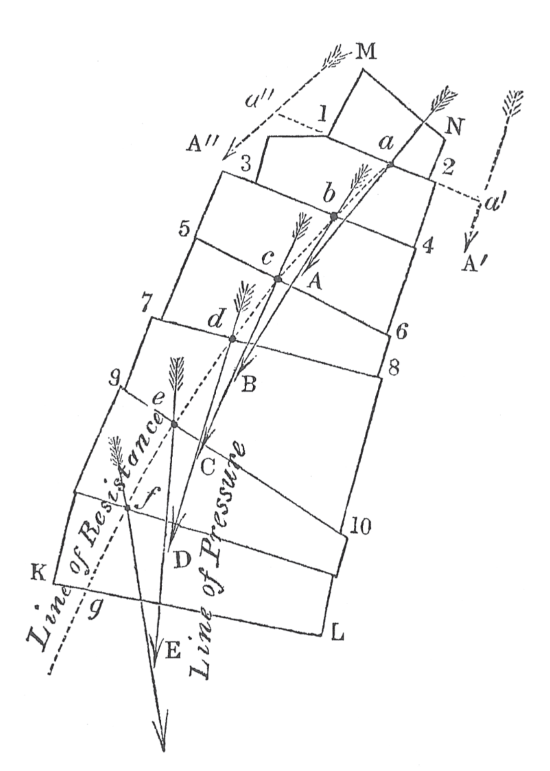
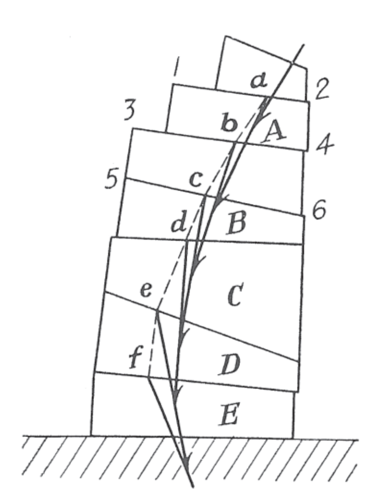


Figura 22.5
De Moseley (1843)

juntas ángulos contenidos dentro del ángulo de rozamiento. La «línea de presiones» es una construcción algo misteriosa; es más, un primer vistazo a la figura 22.5 puede resultar engañoso. Los bloques de piedra de la figura 22.5 pueden entenderse como una parte de un arco de fábrica, sometido a la fuerza de la gravedad y a empujes horizontales en los estribos; si se hace así, no es posible que el vector inferior que actúa en *f*, esté dirigido hacia la derecha —debería tener siempre una componente hacia la izquierda (para equilibrar el empuje superior sobre el estribo). De hecho, Moseley está mostrando un caso totalmente general y, en efecto, en una figura posterior, aparecen fuerzas horizontales actuando sobre el arco, además del peso propio.

La confusión producida en autores posteriores pueden explicarse con la figura 22.6 tomada de la *History of Strength of Materials* de Timoshenko (1953). La figura de la izquierda se deriva de la de Moseley (figura 22.5), así como la de la derecha, que muestra el análisis de Moseley del empuje mínimo *H* de un arco. La línea de resistencia aparece tangente al intradós en *B*, y Moseley demuestra que el empuje *H* se hace mínimo cuando está aplicado en el trasdós, en *A*. De hecho, Timoshenko denomina la línea de trazos línea de presiones, que no lo es, y el hecho de que la línea de resistencia sea tangente en *B* no quiere decir que el vector del empuje en *B* sea también tangente.



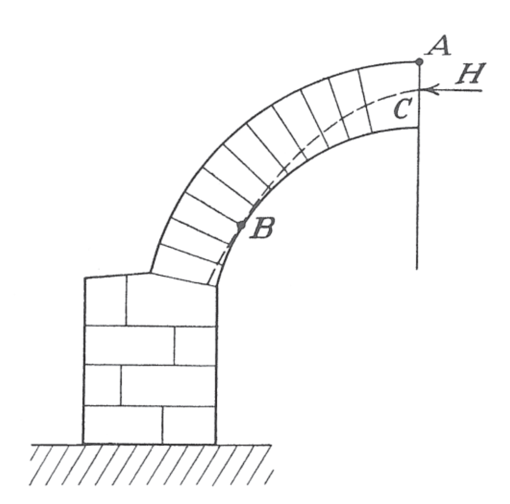


Figura 22.6
De Timoshenko (1953)

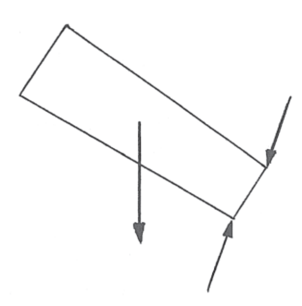


Figura 22.7
Equilibrio de una dovela delgada

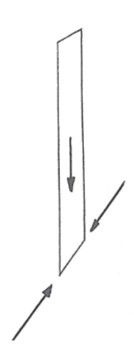
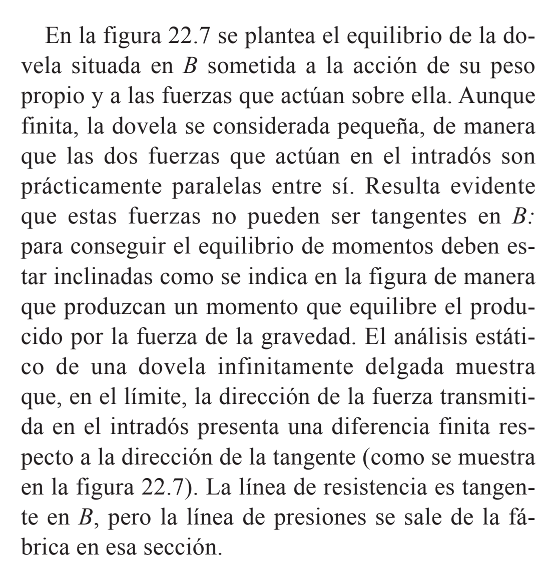


Figura 22.8
Dovela vertical



En la figura 22.7 se plantea el equilibrio de la dovela situada en *B* sometida a la acción de su peso propio y a las fuerzas que actúan sobre ella. Aunque finita, la dovela se considerada pequeña, de manera que las dos fuerzas que actúan en el intradós son prácticamente paralelas entre sí. Resulta evidente que estas fuerzas no pueden ser tangentes en *B:* para conseguir el equilibrio de momentos deben estar inclinadas como se indica en la figura de manera que produzcan un momento que equilibre el producido por la fuerza de la gravedad. El análisis estático de una dovela infinitamente delgada muestra que, en el límite, la dirección de la fuerza transmitida en el intradós presenta una diferencia finita respecto a la dirección de la tangente (como se muestra en la figura 22.7). La línea de resistencia es tangente en *B*, pero la línea de presiones se sale de la fábrica en esa sección.

La coupe des pierres

En la discusión del problema de Couplet se ha supuesto implícitamente que el arco semicircular (Vitruviano) tiene juntas radiales. Por ejemplo, en las ecuaciones del trabajo de Ochsendorf los cuatro bloques definidos por el patrón de rótulas indicado en la figura 22.4 tienen los contornos delimitados; la superficie superior y la inferior son respectivamente el trasdós y el intradós del arco y los otros dos lados son las juntas radiales. De este modo, la masa de cada bloque queda definida y el análisis realizado por Ochsendorf da el valor de 0,1075 para *t*/*R*.

Este valor es correcto para el arco de Couplet con juntas radiales, pero si las juntas se organizan de modo diferente, se obtienen valores distintos. Como un caso extremo, e improbable, si todas las juntas son verticales, entonces, el equilibrio de una dovela delgada adyacente a la rótula del intradós lleva al diagrama de la figura 22.8 (cf. figura 22.7). El equilibrio de esta dovela obliga a que el empuje transmitido sea tangente al intradós, y la solución del autor de 1969 se aplica, de forma no intencionada, a un arco con esta estereotomía. Tiene un interés enorme que Lamé y Clapeyron en 1823 dieran una construcción general para calcular el empuje mínimo sobre los estribos de cualquier arco de fábrica. La posición de la rótula del intradós se obtiene por tanteos mediante la construcción de la figura 22.9 (reproducida de Benvenuto 2006); Lamé y Clapeyron consideran vertical

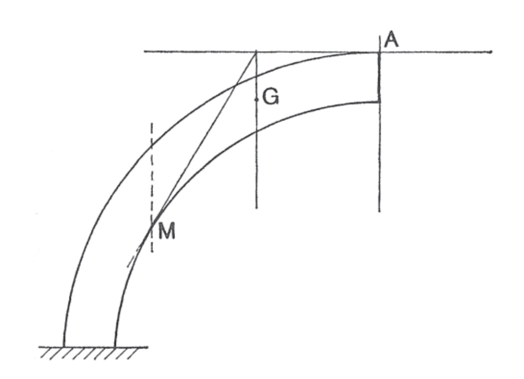


Figura 22.9
Construcción de Lamé y Clapeyron

el corte en la rótula *M* y se calcula el correspondiente peso del monolito superior *AM*, que pasa por *G*. Del análisis estático resulta que la resultante en *M* es verdaderamente tangente al intradós.

Escolios

En la discusión que sigue, se puede imaginar que las observaciones se refieren al arco semicircular de espesor constante, pero, de hecho, se pueden aplicar de modo general.

– En principio se puede considerar que el arco es monolítico, quizá ejecutado en hormigón en masa homogéneo con las propiedades ideales de resistencia a tracción nula y resistencia a compresión infinita. El arco está sometido a su peso propio y a un cierto sistema de cargas verticales. La cadena colgante invertida de Hooke representa un sistema de fuerzas internas en equilibrio con las cargas dadas, y (dado que es perfectamente flexible) es al mismo tiempo la línea de resistencia y la línea de presiones del arco. Si se puede colocar dentro del arco monolítico la cadena de Hooke, el arco es seguro. Si la cadena encaja justo dentro del arco, en ese caso está en el punto de colapso. En particular, la propuesta del autor de 1969 da la solución correcta al problema de Couplet si se considera el arco como un monolito.
– Cualquier corte que se haga atravesando el espesor de un arco monolítico no puede reforzarlo y, en general, lo debilitará. Un arco formado por una serie de bloques de fábrica (dovelas) se puede imaginar como un arco monolítico cortado, en el que las juntas representan los cortes. En un arco «real» de este tipo es necesario garantizar el equilibrio tanto para cada bloque individualmente como para el monolito original. Como se ha visto, el análisis del autor de 1969 no garantiza el equilibrio de cada dovela (a no ser que todas las juntas fuesen verticales). El análisis de Ochsendorf de 2006 da la solución correcta al problema de Couplet para un arco con juntas Vitruvianas (radiales); Ochsendorf estudió el equilibrio de una dovela delgada en la rótula del intradós, figura 22.7, para demostrar el error del autor en 1969.
– Diferentes patrones de juntas llevarán a soluciones distintas, pero se puede imaginar que cualquier estereotomía razonable conducirá a resultados muy similares (la diferencia entre el autor y Ochsendorf es muy pequeña).
– Cualquiera que sea el patrón de juntas, es preciso verificar que cada una de las «dovelas» está en equilibrio local, y que éste es conforme con el sistema de fuerzas producido por la estructura en su conjunto. Un ejemplo conocido es el de un arco de ladrillo formado por varios anillos concéntricos. En un caso extremo (completamente artificial) se podría hacer el arco de un número muy grande de pequeños cubos idénticos (digamos de 1 cm de lado). En teoría, se podría obtener una configuración de equilibrio, aunque muchos cubos situados en las zonas traccionadas se desprenderían: un arco hecho de arena seca colapsaría al instante ante el menor defecto.

23

La implantación del cálculo plástico en el Reino Unido

La introducción en la práctica de métodos plásticos de cálculo en el Reino Unido está asociada con el nombre de John Fleetwood Baker. Baker había sido educado en los métodos convencionales de análisis estructural, y él mismo había logrado avances en el cálculo de las cargas de pandeo de pilares de acero. El alcance de su comprensión de los métodos elásticos quedó reflejado en su valioso libro de texto sobre el análisis de estructuras, escrito con A. J. Sutton Pippard, y publicado por primera vez en 1936.

Ese mismo año se produjo el cese de sus funciones tras seis años como funcionario técnico de la Comisión de Investigación de las Estructuras de Acero (Steel Structures Research Committee, SSRC), y la publicación del último volumen (de tres) de los informes de dicha comisión. En 1930 en Reino Unido existían varias normativas locales de cálculo de estructuras de acero. Estas normativas a veces entraban en conflicto, y el comité las reunió en una única norma: la British Standard 449, *El empleo del acero estructural en edificación,* como un recurso provisional hasta que se pudieran desarrollar métodos más racionales. Se inició entonces una investigación teórica y, lo más importante, se llevaron a cabo ensayos sobre pórticos de acero de gran tamaño. Los resultados de estos ensayos fueron inquietantes: las tensiones observadas en los ensayos no se correspondían con las obtenidas mediante los métodos convencionales de cálculo disponibles.

El comité identificó la razón de estas discrepancias: detalles menores de la construcción (por ejemplo, las uniones atornilladas) tenían una gran influencia en el comportamiento real de un pórtico de acero. El comité ideó un elaborado esquema de cálculo para tratar de tener en cuenta estas anomalías, pero el método era limitado, y en todo caso demasiado complejo para el uso de los ingenieros en ejercicio. Los proyectistas recurrieron a la norma unificada, BS 449, que era irracional y en gran medida empírica, pero que al menos parecía conducir a proyectos seguros de pórticos de acero, incluso si estos pórticos no se comportaban en la realidad como predecían los métodos elásticos.

En 1936 Baker se dio cuenta de que no se podía avanzar más en este camino. Aún no había oído hablar de los métodos plásticos, pero en el verano de ese mismo año viajó a Alemania, donde la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras (International Association for Bridge and Structural Engineering, IABSE) había celebrado un congreso en Berlín; una sección de las actas estaba formada por ocho artículos en el campo de la plasticidad general. En particular, Baker conoció los ensayos de vigas hiperestáticas que colapsaban todas para la misma carga, aunque los soportes de las vigas se hubieran fijado inicialmente a diferente nivel —desde luego, las vigas tenían (tal y como se predecía) diferentes

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The establishment of plastic design in the UK,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Engineering History and Heritage* 162 (2009): 7–11. Traducción de Paula Fuentes González.

tensiones elásticas en las primeras etapas de la carga, pero el desarrollo de la cedencia plástica «eliminaba» estas «imperfecciones» iniciales. Baker se dio cuenta de inmediato que se había abierto un camino, y que había que avanzar en los métodos plásticos de cálculo.

Baker fue nombrado catedrático en Bristol en 1933, y se trasladó a Cambridge 10 años después. Dedicó mucho tiempo y esfuerzo en ambas universidades, lamentablemente con pocos recursos, al desarrollo de métodos plásticos, y fue un logro asombroso haber avanzado en 12 años (1936-1948) hasta el punto de introducir una cláusula en la British Standard 449: «Como alternativa, (los cálculos) se podrán basar en los principios del cálculo plástico que proporcionen un factor de carga adecuado». Esta fue la única referencia a la plasticidad, y no se orientó al proyectista en cómo usar el método.

Métodos plásticos

Cualquier material útil para el ingeniero estructural debe ser dúctil; acero dulce, hierro forjado, aluminio y hormigón (poco armado) pueden absorber (mediante cedencia) tensiones imprevistas impuestas por el entorno, mientras que el hierro fundido y el vidrio se romperán. Esta absorción plástica de energía tuvo una aplicación espectacular en el proyecto de Baker del refugio Morrison en 1941. Al estallar la Segunda Guerra Mundial, Baker fue nombrado asesor científico del Ministerio de Seguridad para el Hogar (Ministry of Home Security), y su particular cometido fue salvaguardar estructuras (especialmente fábricas de material militar) de los daños de las bombas. La clave del proyecto era dar continuidad y ductilidad, y estos fueron los principios aplicados al refugio doméstico Morrison (figura 23.1). La base intelectual del proyecto del refugio era a la vez sencilla y elegante, e inalcanzable, realmente impensable, para un proyectista elástico. El refugio, de la forma y tamaño de una mesa de comedor (o una cama doble) bajo la cual podía dormir una familia, fue proyectado para aplastarse plásticamente menos de 300 mm si la casa se hundía. La energía liberada en el hundimiento de una casa se puede estimar con cierta precisión; la energía absorbida en la deformación plástica del acero se puede calcular con mucha exactitud. El cálculo del refugio se realiza igualando ambas cantidades.

Esta aproximación al proyecto contiene el germen de la idea revolucionaria de la teoría plástica. Es necesario que los edificios se mantengan en pie, de modo que puedan ser utilizados con seguridad. El proyectista elástico convencional intenta calcular el estado real de una estructura, de manera que se pueda asegurar que el edificio sea efectivamente seguro. El proyectista plástico hace una inversión trivial de esta afirmación, en lugar de exigir que el edificio se mantenga en pie, se exige que no se caiga. La pregunta que se hace el proyectista plástico no es cómo se comporta una estructura bajo la carga de servicio, sino la forma en que podría colapsar bajo un exceso de carga. El concepto de colapso implica cálculos completamente distintos, que conllevan deformaciones plásticas en lugar de estados elásticos hipotéticos (que el SSRC había demostrado que ni siquiera eran observables en la práctica).

Las imperfecciones muy pequeñas, a las que una estructura hiperestática es tan sensible, son desconocidas e incognoscibles. Pequeños deslizamientos en uniones, asientos de la cimentación, elementos fabricados con un tamaño ligeramente incorrecto, todo ello dará lugar a grandes deformaciones (y por lo tanto a grandes tensiones asociadas) que no se pueden predecir. El proyectista elástico debe hacer la suposición de que la estructura es perfecta, y por tanto los cálculos se refieren a la estructura perfecta, y no a una construcción real.

Sin embargo, las suposiciones del proyectista elástico parecen razonables, incluso aunque conduzcan a

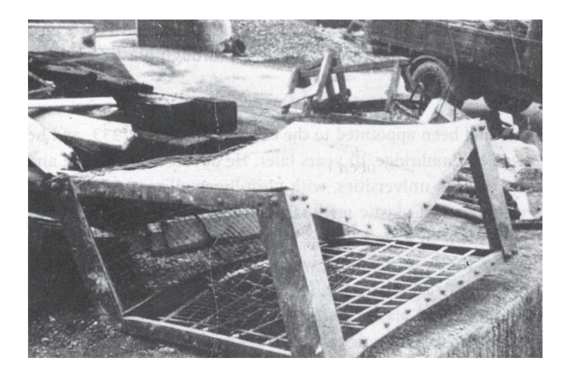


Figura 23.1
El refugio Morrison de la foto fue recuperado de una casa que fue derribada completamente por una bomba de unos 250 kg en 1941. La familia del refugio sobrevivió ilesa, gracias a la energía absorbida por las rótulas plásticas

estados elásticos no observables; el sentido común lleva a pensar que un defecto trivial no puede afectar realmente a la resistencia de una estructura. En esta ocasión el sentido común está en lo cierto; la paradoja se resuelve con la conclusión de que el cálculo de las tensiones elásticas apenas es relevante para la predicción de la resistencia. La resistencia general no depende de que la tensión elástica llegue a un cierto límite en algún punto de la estructura: viene dada por el continuo desarrollo de deformaciones inaceptablemente grandes. Los ensayos alemanes mostraron que tales deformaciones se producen cuando se alcanza un número suficiente de rótulas plásticas que convierten la estructura, o parte de ella, en un mecanismo de colapso. El orden en el que se formen las rótulas en un ensayo de carga depende del estado de auto-tensión inicial generado por las imperfecciones, pero al final siempre se forma el mismo número de rótulas, y las cargas de colapso son siempre las mismas.

Por lo tanto, en 1948, el cálculo plástico (cuando lo permitió la BS 449), se veía como el estudio de los mecanismos de colapso. El factor de seguridad de las tensiones utilizado por los proyectistas elásticos fue reemplazado por un factor de carga hipotético —se imaginaba que las cargas de servicio aumentaban hasta que se producía el colapso. Para la llamada carga proporcional, surgió un único factor de carga para el proyecto de estructuras de acero sencillas, concretamente 1,75 para el peso propio y las sobrecargas, con una posible reducción a 1,40 si se consideraban también los efectos del viento, y si éstos parecían ser críticos.

Para los sistemas de vigas hiperestáticos sencillos y pórticos continuos de acero, es relativamente fácil estudiar los patrones de rótulas que generan mecanismos de colapso. Los cálculos son fáciles (mucho más fáciles que los de las estructuras elásticas), y desde 1948 en adelante se proyectaron y construyeron muchos pórticos de acero. El método plástico era particularmente adecuado para los pórticos de uno o varios vanos con cubierta a dos aguas, y algunos contratistas se especializaron en el suministro de edificios industriales económicos. El primer pórtico de un solo vano se construyó en 1947 para el laboratorio de ensayo de fatiga de la Asociación Británica de Investigación de Soldadura (British Welding Re-

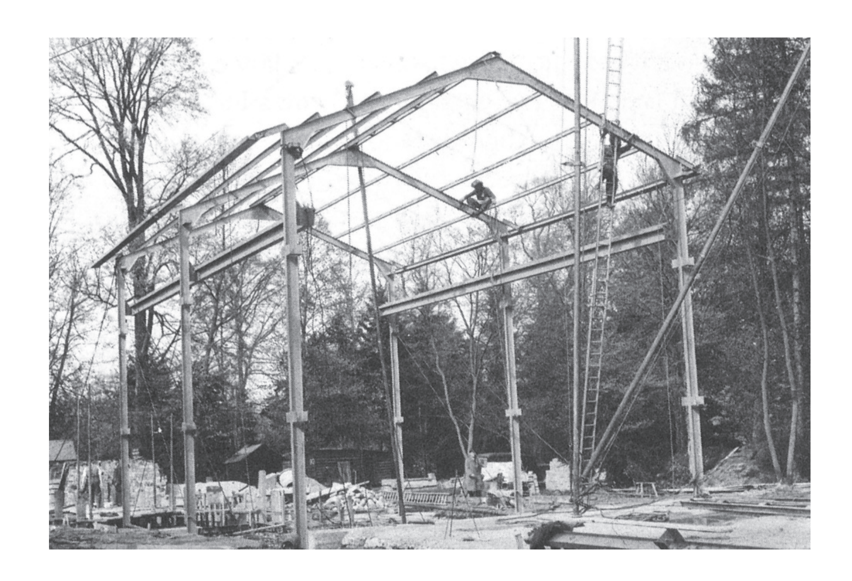


Figura 23.2
Pórtico completamente soldado para el laboratorio de ensayos de fatiga, BWRA, 1947. Los métodos plásticos están relacionados con la resistencia, y para estimar la rigidez se deben hacer cálculos elásticos. Las cartelas en los vértices de los pórticos son zonas de flexión elevada y casi uniforme, y reducen las deformaciones notablemente si se compara con un pórtico sencillo. En los aleros aparecen «picos» de momento, y las cartelas aumentan la resistencia total

search Association, ahora TWI) en Little Abington, (Figura 23.2). El proyecto era plástico, pero se realizaron cálculos elásticos para complacer a las autoridades locales.

Algunos proyectos plásticos

Al uso de la teoría del cálculo plástico se le dio un impulso inicial, no por su enfoque más racional, sino por el evidente ahorro de material (normalmente un 25%) que se podía lograr en comparación con el cálculo elástico. Esta economía se deriva del hecho de que una parte mayor del pórtico se ve obligado a participar en la tarea de transmitir la carga aplicada; la carga se redistribuye, y en lugar de que una sola sección llegue a una tensión crítica elástica, para que se produzca el (hipotético) colapso, se debe alcanzar el límite plástico en un número suficiente de secciones. Con el racionamiento de acero en el Reino Unido, que persistió después del final de la Segunda Guerra Mundial, se concedieron licencias preferentemente a los proyectos que eran económicos en el uso del material. (Por desgracia, el ahorro típico del 25% en peso de material se compensaba a menudo por un aumento en el costo del 25% impuesto por contratistas no habituados (en ese momento) a la soldadura in situ de pórticos continuos.)

Sin embargo, se logró un segundo ahorro (antes del uso generalizado de ordenadores) por la gran reducción en el tiempo de cálculo. Los emparrillados de vigas, por ejemplo, tal como se utilizaron en la caseta 102 en Southampton (Figura 23.3), o en la esquina de Kensington de la línea Inner Circle (Figura 23.4), tenían, elásticamente hablando, un gran número de redundancias. Sin embargo, el cálculo plástico podía proceder vano a vano, aislando en el colapso cada tramo de viga de sus vecinos.

El proyecto de vigas armadas, como las de las figuras 23.3 y 23.4, provocó un problema que antes no se había considerado seriamente. El alma de los perfiles laminados tiene normalmente la dimensión necesaria para ser capaz de soportar los rangos habituales de cortante, pero el alma de vigas armadas tuvo que ser dimensionada para que pudiera soportar la carga requerida. El proyecto en su conjunto, es decir, el análisis estructural, estuvo condicionado por análisis tensionales locales (plásticos) de detalle.

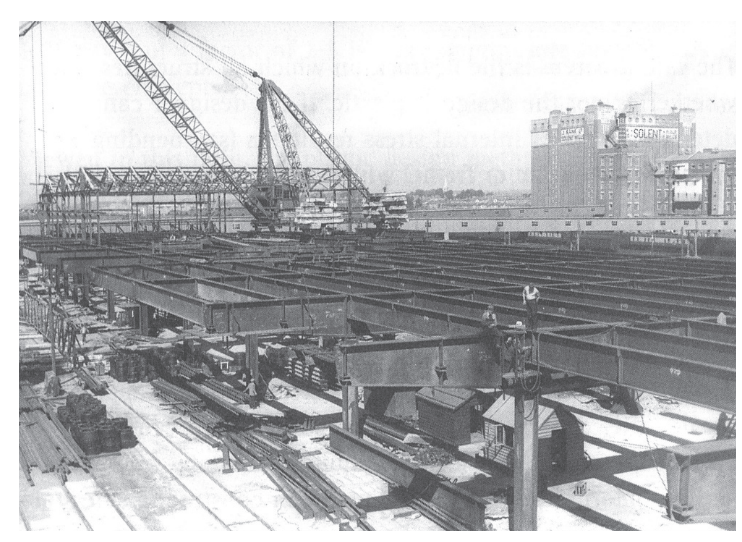


Figura 23.3
Construcción de acero para la nave 102, Southampton (Union Castle Line Terminal), 1954; ingenieros consultores Scott and Wilson, Kirkpatrick and Partners. Las vigas principales tienen 2 m de canto, y una luz de 33 m con un apoyo interior; las vigas secundarias eran continuas, salvando cinco tramos, de 15 m cada uno, con poco más de 1 m de canto. La continuidad se garantizó mediante soldaduras a tope realizadas in situ

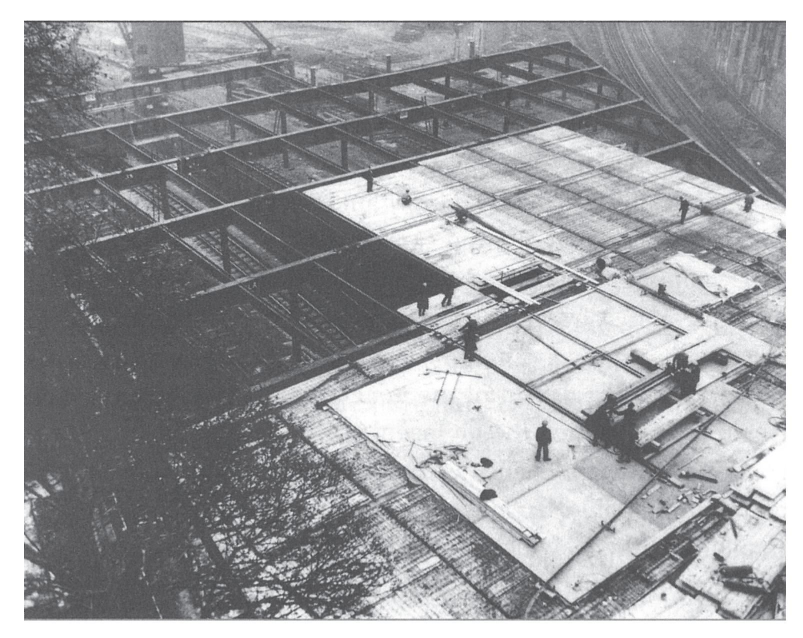


Figura 23.4
Antes de la década de 1950, dos pistas de atletismo y siete apartaderos del sistema de metro de Londres emergieron a la superficie cerca de Gloucester Road; varias hectáreas de terreno edificable excelente fueron así esterilizados. Una losa de hormigón sobre un entramado de acero proporciona la cimentación para varios edificios de varias plantas, incluyendo un hotel y la (entonces) terminal aérea de Londres. Las vigas de acero tenían 1 m de canto y hasta 18 m de luz, y los pernos de alta resistencia se utilizaron para lograr uniones de empotramiento perfecto

Del mismo modo, los métodos plásticos dependen del comportamiento dúctil de toda la estructura, y esto implica evitar el pandeo —la inestabilidad es, por su propia naturaleza, un fenómeno no dúctil. Así, el proyecto de pilares en pórticos de acero tenía que casar de alguna manera con un punto de vista general plástico y, tradicionalmente, la estabilidad se estudia con la teoría elástica. Se desarrollaron ingeniosos y elegantes esquemas de cálculo que permitían que se desarrollara alguna plasticidad en pilares de una sola altura, que resultaron valiosos para el proyecto de los pórticos de una sola planta, como el mostrado en la figura 23.2.

Sin embargo, para el proyecto de pórticos de varias alturas y vanos surgió el enfoque «viga débil-pilar fuerte». Las vigas se proyectaban plásticamente con la mínima sección posible, mientras que los pilares se proyectaban (mediante métodos estándar, que también se estaban desarrollando) para permanecer en estado elástico. El desarrollo se produjo en un momento en que el departamento de ingeniería de la Universidad de Cambridge estaba disfrutando de una crecimiento considerable. Un edificio nuevo de gran tamaño (llamado ahora edificio Baker) se había proyectado por los métodos tradicionales en la década de 1940, pero en tres ocasiones posteriores se aprovechó la oportunidad para agregar alas con pórticos de acero proyectados plásticamente. El primero de estos edificios, el ala central del edificio Baker, fue erigido en 1957. Tiene un pórtico de un solo vano y cuatro alturas soldado in situ, y no es notable excepto por ser, probablemente, el primer pórtico de varias alturas que se proyectó plásticamente.

De mayor interés es el ala norte del edificio Baker, de cinco plantas, construido en 1963. Se necesitaban luces libres de 15 m; las alturas de las plantas tenían que coincidir con las del edificio existente; y las cargas eran altas. Estas limitaciones descartaron un pórtico de acero sencillo, ya que el canto de las vigas habría sido demasiado grande, y se decidió utilizar

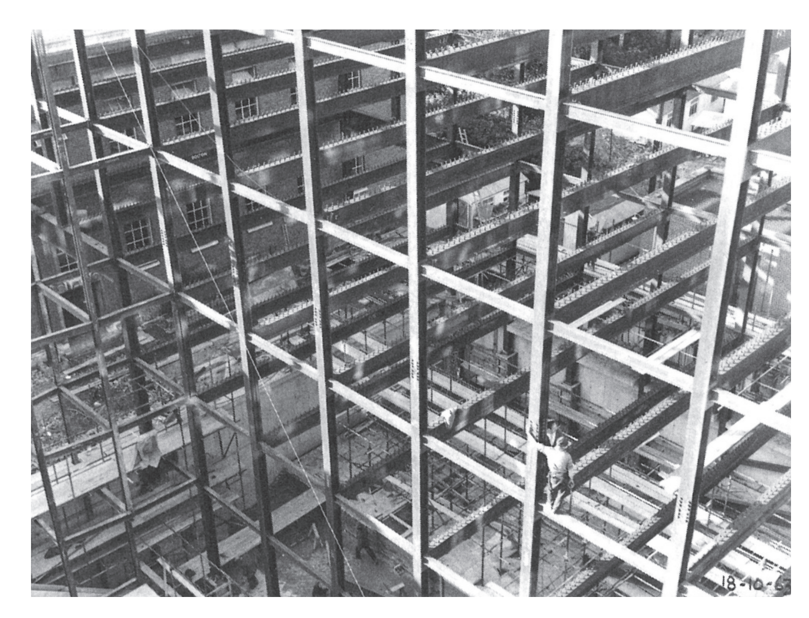


Figura 23.5
Laboratorios de Ingeniería de la Universidad de Cambridge —ala norte del edificio Baker en construcción en 1963. Por razones de coste las uniones de empotramiento perfecto entre vigas y pilares se hicieron con pernos de alta resistencia en lugar de soldadura. Los conectores para el cortante que se ven en la foto fueron espaciados de acuerdo a las reglas existentes en 1963; el trabajo teórico y experimental posterior indicó que con un espaciado no uniforme y menos conectores se habría obtenido un proyecto más económico

una construcción mixta (Figura 23.5). No era necesaria ninguna modificación del enfoque plástico básico —las losas del forjado de hormigón actuaban, por supuesto, como elementos de compresión que soportaban los momentos flectores en las secciones correspondientes.

Por último, en 1965 se completó un pórtico de acero soldado de varios pisos completamente rígido, como punto de partida para la reconstrucción de los laboratorios de 1920 (Figura 23.6). Los pórticos de esta ampliación tenían cuatro vanos (normalmente con 12 m de luz) y cuatro plantas de poco más de 3,6 m cada una.

Los teoremas fundamentales

Para el decenio de 1960, cualquier ingeniero que se preocupara de aprender el procedimiento podía calcular la carga de colapso plástico de un pórtico de acero, y así proporcionar un proyecto seguro y económico. Sin embargo, cada estructura, o tipo estructural, se abordó individualmente; no había principios básicos que sirvieran de base para los cálculos. Baker, en 1950, no conocía los teoremas plásticos fundamentales.

Estos teoremas fueron formulados por Gvozdev en Rusia en 1936, y habían sido ignorados por completo hasta que W. Prager los sacó a la luz en 1949. Prager había estado en el congreso de Berlín de 1936 de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras (IABSE), y había dejado Alemania justo antes de la Segunda Guerra Mundial, llegando finalmente a la Universidad de Brown en Providence, Rhode Island, a principios de la década de 1940, donde estableció una sólida escuela de matemática aplicada e ingeniería.

La teoría de estructuras es una rama excepcionalmente sencilla de la mecánica de sólidos, ya que sólo se pueden escribir tres tipos de ecuaciones (por desgracia, la solución de estas ecuaciones simples a veces puede ser difícil). En primer lugar y ante todo, una estructura debe estar en equilibrio: las resultantes de tensiones internas (momentos flectores, fuerzas en las barras, etc.) deben estar en equilibrio con la carga

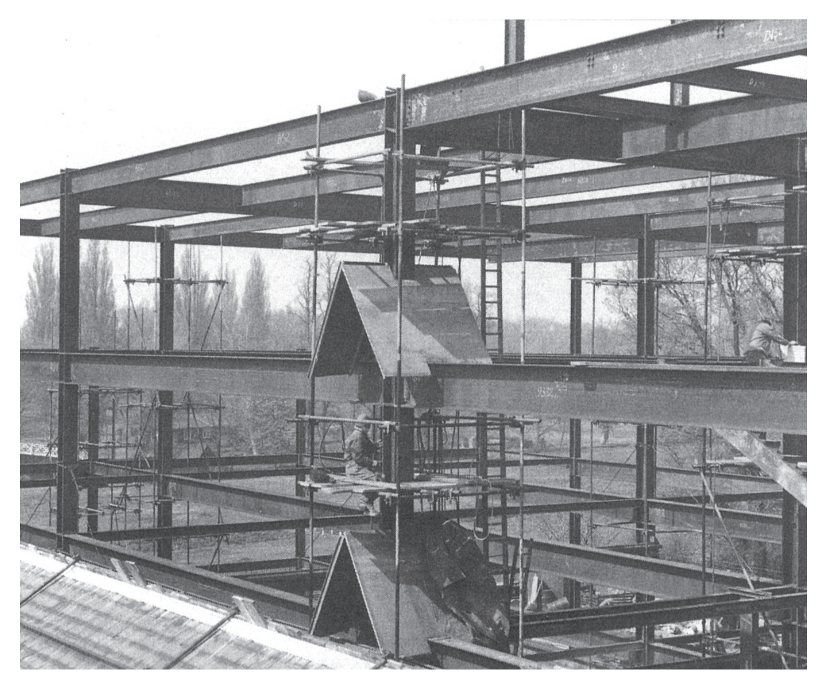


Figura 23.6
Inglis «A»: reconstrucción de los laboratorios de Ingeniería de la Universidad de Cambridge, 1965. El ahorro se consiguió mediante el uso de acero de alta resistencia (resistencia garantizada 22 ton/in^2, 300 N/mm^2, comparado con las 16 ton/in^2, 220 N/mm^2, del acero dulce). El proyecto estaba de acuerdo con un informe publicado en 1964, y seguía la filosofía de viga débil (cálculo plástico) y pilar fuerte (cálculo elástico). Las resistencia completa de las soldaduras se consiguió in situ —las «tiendas» de la fotografía tenían el propósito de proteger la construcción de la lluvia (finalmente, no fueron necesarias)

externa. Una vez que se conocen estas resultantes de tensiones internas, se pueden dimensionar los elementos internos, y si pueden determinarse únicamente a partir de las ecuaciones de equilibrio, entonces la estructura es, por definición, estáticamente determinada, isostática.

La mayoría de las estructuras son hiperestáticas, y se deben utilizar los otros dos grupos de ecuaciones. Las deformaciones internas se pueden relacionar con las tensiones internas —para un análisis elástico, los alargamientos son proporcionales a los esfuerzos en las barras, las curvaturas son proporcionales a los momentos flectores, y así sucesivamente. Por lo tanto, se debe proponer una ley de tensión/deformación. Por último, estas deformaciones internas deben ser tales que los elementos de la estructura encajen, y la estructura en su conjunto satisfaga cualesquiera de las condiciones de contorno especificadas (por ejemplo, los soportes están en lugares determinados). Las llamadas condiciones de compatibilidad forman el tercer grupo de ecuaciones estructurales. Es la dificultad, en la práctica, de satisfacer estas condiciones de compatibilidad la que conduce al comportamiento aparentemente anómalo de una estructura real, y muy pequeñas imperfecciones pueden conducir a grandes cambios en la distribución de las tensiones elásticas internas.

El análisis plástico hace uso forzosamente de los mismos tres grupos de ecuaciones, pero en una forma muy simplificada. Las ecuaciones de equilibrio son, por supuesto, de suma importancia, y se mantienen sin cambios. Sin embargo, la ley tensión/deformación (elástica) se sustituye simplemente por la idea de una tensión plástica límite: la condición de cedencia; para una viga o un pórtico hay un valor máximo de momento, el momento plástico completo, en el que se forma una rótula. Finalmente, la consideración de la deformación se reduce al simple requisito de que debe

haber un número suficiente de rótulas plásticas para que se produzca un mecanismo de colapso.

Que los cálculos del método plástico son más fáciles que el análisis elástico es evidente. Por ejemplo, no hay ecuaciones diferenciales de flexión para el análisis de vigas o pórticos (o no hay sumatorios de energía de deformación, o similar, para cerchas). En cambio, el proyectista se enfrenta únicamente a sistemas de ecuaciones lineales simultáneas.

Además, el proyectista plástico puede hacer uso de los teoremas fundamentales de Gvozdev, que se pueden exponer esquemáticamente:

Exacto	Mecanismo	—	Inseguro
	Equilibrio		Seguro
	Cedencia		

Si el proyectista puede hacer que se cumplan las tres condiciones, entonces se obtiene una solución exacta al problema de calcular la resistencia de una estructura. Si sólo se consideran los mecanismos de colapso, entonces se pueden hacer estimaciones rápidas y fáciles para el proyecto que serán inseguras —sin embargo, a menudo es posible adaptar los cálculos para determinar el proyecto menos inseguro.

El teorema de la seguridad es la roca sobre la que se asienta toda la teoría de estructuras, tanto si el análisis es plástico como si no. Si el proyectista puede determinar un conjunto de resultantes de tensiones internas (es decir momentos flectores en una viga o pórtico) que está en equilibrio con la carga especificada, y que no viola la condición de cedencia en ningún punto —un estado en que la estructura está cómoda— entonces la estructura es segura. Desde el punto de vista del proyectista plástico, la condición de cedencia consiste simplemente en un valor límite del momento plástico; para el proyectista elástico, hay una tensión elástica limite. En ninguno de los enfoques el proyectista obtiene un estado de tensiones real, sino simplemente un posible estado de equilibrio, pero, de manera antropomórfica, si el analista puede encontrar un estado seguro de equilibrio, entonces, la estructura también lo encontrará. Por esta razón el proyecto con las normativas de cálculo elástico conduce a estructuras seguras: las tensiones calculadas por el proyectista no son reales, y el proyecto es, en este sentido, irracional, pero conduce a un estado de equilibrio seguro.

La mera afirmación de que una estructura es segura no proporciona una medida de esa seguridad. En 1948, cuando la BS449 permitió el análisis plástico, el análisis elástico sencillo de vigas y pórticos de acuerdo con las cláusulas de ese código implicaba un factor de carga de colapso de 1,75, y es este valor el que ha sido ampliamente adoptado como factor de carga proporcional (único) para un análisis plástico. Es decir, el proyectista imagina que todas las cargas se aumentan hipotéticamente por el factor 1,75, y luego dimensiona los elementos a fin de que la estructura se encuentre justo en el punto de colapso.

De hecho, no hay necesidad de imaginar un aumento de la carga que conduzca a un eventual colapso. El análisis plástico se puede llevar a cabo con un factor de carga unidad, utilizando, por lo tanto, los valores de servicio de las cargas. El dimensionado correspondiente de los elementos (valores de los momentos plásticos completos) se realiza de modo que la estructura está justo en el momento del colapso, pero en realidad se construye aumentando el dimensionado con un factor acordado (en general, digamos 1,75, pero un factor de 2,5 es más apropiado para elementos potencialmente inestables).

Visto de esta manera, el método de cálculo plástico se puede considerar como un análisis de equilibrio. Tal vez ha llegado el momento de eliminar la palabra «plástico», con sus connotaciones de peligrosos mecanismos de colapso (en los EE.UU. se utiliza normalmente el término «análisis límite»), y sustituirlo por unas palabras reconfortantes tales como «equilibrio estático». El análisis plástico se contempla ahora como un método «universal» aplicable no sólo al acero sino también al hormigón armado (como ha sido reconocido implícitamente durante muchos años en las normativas pertinentes), y, quizá sorprendentemente, a la fábrica de ladrillo o piedra. De hecho, se puede aplicar a cualquier material que el ingeniero considere suficientemente dúctil para ser objeto de uso estructural.

24
Matemáticas y proyecto de estructuras

LAS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

El monumental tratado de Eduardo Benvenuto sobre la historia de la teoría de estructuras constituye un profundo estudio de la forma en que las matemáticas llegaron a usarse en el análisis estructural.

Se pueden distinguir tres disciplinas distintas: la geometría, la mecánica y el análisis.

La palabra «geometría» cubrirá los intentos de idear formas, racionales o no, bien sean generales (como el perfil de un arco), o sean para elementos estructurales (como el éntasis de las columnas). El término «mecánica» se aplicará a las investigaciones que busquen los valores de las fuerzas internas en una estructura, que pudieran emplearse para evaluar la resistencia y la deformación de la estructura, o para calcular las fuerzas que ésta ejerce sobre el entorno. Finalmente, «análisis» se empleará en un sentido técnico que implica el uso de métodos algebraicos, y en particular el uso del cálculo infinitesimal. (Por ejemplo, la geometría analítica aplica el álgebra y el cálculo infinitesimal a problemas de geometría euclidiana clásica.)

El enunciado maestro de Hooke del año 1675 a cerca de «la verdadera forma matemática y mecánica de todo tipo de arcos para la edificación, con el verdadero contrarresto necesario para cada uno de ellos», exhibe cada uno de los tres términos. El anagrama (escrito en latín), y descifrado tras la muerte de Hooke, dice: «Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». Este enunciado resuelve el problema «geométrico»; si una serie de cargas (arbitrarias) se anclan a una cadena ligera, la forma de la cadena, invertida, dará la forma del arco perfecto (de fábrica) para soportar esas cargas. Asimismo, la «mecánica» de la cadena colgante (es decir, el cálculo de las fuerzas, que no era fácil pero sí posible en 1675) aportará el valor de la tracción horizontal necesaria en los extremos de la cadena y, por tanto, el valor del empuje horizontal del arco correspondiente —entonces, se podrán calcular los «estribos» para resistir ese empuje.

Hooke había afirmado frente a la Royal Society en 1670 que había resuelto el problema planteado en su «enunciado maestro» de 1675, y fue presionado, en aquel momento y más adelante, para aportar su «demostración» (es decir, la prueba matemática). Nunca lo hizo, y de hecho no fue capaz de realizar el «análisis» —no pudo determinar matemáticamente, mediante el empleo de geometría clásica o del nuevo cálculo infinitesimal, la ecuación de la forma de la cadena colgante. Por este motivo lo ocultó, por el momento y, de hecho, hasta su muerte, tras el anagrama en latín —quería ser él quien encontrara la

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Mathematics and structural engineering». En: *Mechanics and Architecture: Between Epistéme and Téchne,* ed. por A. Sinopoli. (Roma: Edizioni di Storia e Letteratura, 2010): 3–12. (Este fue el texto de la Conferencia dictada por el autor al recibir el Doctorado Honoris Causa de la Universidad Politécnica de Madrid el 28 de enero de 2008.) Traducción de Alejandra Albuerne Rodríguez y Rosa Ana Guerra Pestonit.

solución antes de que otro experto en geometría se beneficiara de su entendimiento. (Hooke ya había sido perjudicado, de modo imperdonable, en un caso parecido. Había publicado abiertamente su revolucionaria idea de que los cuerpos celestes ejercían de alguna manera una atracción entre ellos, pero no pudo hacer uso de esto matemáticamente. Para Newton era una idea nueva, pero una vez comprendida la idea, Newton no encontró dificultades para deducir la ley del inverso del cuadrado, usando el lenguaje de la geometría clásica en vez del lenguaje del cálculo infinitesimal. Hooke se indignó al no recibir ningún reconocimiento en los *Principia* cuando se publicaron en 1687.)

Los tres gigantes matemáticos, James Bernoulli, Leibniz y Huygens, se encontraban inmersos en 1690, de una forma competitiva y con éxito, en la resolución analítica del problema de la catenaria; los tres eran también cautelosos a la hora de revelar entre ellos los detalles completos de sus descubrimientos. Hooke había resuelto el problema «técnico» del proyecto de arcos para soportar cargas determinadas, y para este fin la búsqueda de la ecuación de la catenaria llevada a cabo por los tres matemáticos era irrelevante. La solución buscada era para una carga uniforme, que es una representación muy pobre para el caso práctico del proyecto de puentes, que han de soportar su peso propio no uniforme, así como sobrecargas. (Curiosamente, una distribución parabólica de la carga da una base razonable para el cálculo de un puente en arco.)

Un ejemplo moderno de cálculo estructural que de nuevo exhibe los tres términos incluidos en el título de este artículo es el cálculo de cáscaras delgadas de hormigón armado —una forma estructural hoy en día algo pasada de moda. Las ecuaciones diferenciales de la denominada teoría de la membrana son por supuesto analíticas, a la vez que son ecuaciones de equilibrio (mecánicas) escritas en función de las resultantes de las tensiones internas; la geometría puede ser predefinida (por ejemplo, un paraboloide hiperbólico) o se puede derivar de las propias matemáticas. Tales cáscaras tienen con frecuencia espesor constante (excepto quizás en los bordes). Es interesante que Hooke, habiendo determinado (para su satisfacción personal) la forma adecuada para un arco bidimensional, buscara también la forma de la cúpula perfecta (considerada tácitamente de espesor constante, como ocurre en la más interior de las tres cúpulas de la catedral de San Pablo). Declaró que la forma era, de nuevo sin prueba matemática, la del conoide parabólico-cúbico (es decir, $y = ax^3$ rotado en torno al eje y). La forma verdadera (en base a ciertas suposiciones) es mucho más compleja, pero se diferencia mínimamente del perfil propuesto por Hooke. Hooke y Wren colaboraron estrechamente, y uno de los dibujos de Wren para San Pablo incluye la representación, de forma explícita, de la ecuación de Hooke.

Una perspectiva histórica

Las categorías, bastante difusas, de geometría / mecánica / análisis se pueden aplicar al estudio de la actividad arquitectónica a lo largo de los siglos. Las reglas de la arquitectura, desde antes de Ezequiel (siglo VII a. C.), a través de Vitruvio y el gótico y hasta parte del Renacimiento, eran esencialmente reglas de proporción, y por tanto geométricas. Las nociones de mecánica y análisis están totalmente ausentes, si bien los constructores debían ser plenamente conscientes de que las fuerzas estructurales exigían a veces la presencia de estribos, e indudablemente requerían (aunque no siempre recibían) buenas cimentaciones.

Resulta extraño para un ingeniero moderno, acostumbrado a tratar problemas de resistencia, que las reglas de proporción sean las que den lugar a estructuras viables. Es, de hecho, apropiado el dejar de lado las propiedades del material para la construcción en fábrica; el material empleado en templos griegos y catedrales góticas está sometido a unos niveles de tensión muy bajos. Elementos importantes (como, por ejemplo, los arbotantes) están sujetos a tensiones que rondan la centésima parte de la resistencia de aplastamiento de la piedra. Los ingenieros modernos hacen trabajar a los materiales modernos (acero y hormigón armado) mucho más cerca de sus límites de resistencia.

Las reglas antiguas iban dirigidas a asegurar la estabilidad global de la estructura. Para templos griegos y romanos, por ejemplo, una relación límite entre la altura y el diámetro de una columna aseguraba su estabilidad, mientras que la restricción de la luz entre columnas aseguraba que se pudieran emplear como arquitrabes monolitos de tamaño razonable. Las reglas antiguas fueron, por lo general, satisfactorias.

Hubo algunas anomalías. Una variación en el proyecto podía resultar en una forma de arbotante que

no fuera capaz de contener las necesarias fuerzas de compresión (como en Amiens, construida en 1260), con los daños consiguientes; o la forma global de una catedral puede ser tal que cualquier pequeña deformación impuesta por un ambiente (hostil) pudiera desestabilizar la estructura (como probablemente ocurrió en Beauvais en 1284). No obstante, un edificio que básicamente cumpliera las reglas geométricas establecidas sería seguro —un artista-artesano como Íñigo Jones, quien había llegado a dominar los estilos italianos (por encima de todo, los de Palladio) y había conseguido reconocimiento como escenógrafo, podía pasar a dedicarse al proyecto de edificios reales, en vez de dedicarse a decorados pintados.

Había, por supuesto, cabida para la interpretación de las reglas, y las logias de canteros tenían cada una sus propias reglas de proyecto. Los informes periciales de Milán de 1399-1400 muestran a maestros de toda Europa discutiendo sobre la mejor manera de reanudar la interrumpida construcción de la catedral. Las reglas que se discutieron eran principalmente numéricas, pero en las actas se encuentran también cuestiones como el empuje de los arcos y la necesidad de estribos. Como tema enormemente fascinante, si bien carente de consecuencias prácticas, la cuestión de los números irracionales (tales como la raíz cuadrada de 2) que habían estado latentes desde tiempo de los griegos, salieron a relucir de nuevo en Milán. La construcción antigua y medieval se replanteaba mediante el uso de la gran medida, es decir, una vara o pértiga física (en Inglaterra conocida como *rod, pole* o *perch*) en la que se marcaban las unidades de longitud, subdividida según fuera necesario de acuerdo con las reglas de proporción adoptadas. Se sabía que, independientemente del número de subdivisiones de las unidades, no era posible hacer una marca en la gran medida que representase un numero irracional. Por definición (como demostró Pitágoras) un número irracional no podía ser expresado en forma de fracción, es decir, como una proporción.

A mediados del siglo XVII las reglas de la arquitectura habían comenzado a incluir otros conceptos además de los de la geometría, y la profesión empezaba a adoptar ideas de lo que hoy en día llamamos ingeniería o cálculo de estructuras. Las ecuaciones de la estática se añadieron a las reglas geométricas. Por ejemplo, François Blondel, en 1673, estudió los cuatro problemas principales de la arquitectura, y éstos pueden ser asignados a las dos primeras categorías, la geometría y la mecánica. Los problemas trataban:

- el éntasis de las columnas (geometría)
- la forma de los arcos (geometría)
- las juntas entre dovelas de los arcos (geometría; ¿mecánica?)
- la resistencia de las vigas en voladizo (mecánica)

La creación del éntasis es importante visualmente, pero apenas afecta al comportamiento estructural de una columna. El cuarto problema fue estudiado por primera vez por Galileo en 1638, y se menciona de nuevo más adelante.

Los problemas segundo y tercero que plantea Blondel tratan importantes temas «técnicos» en el proyecto de arcos. El arco de fábrica (y sus derivados tridimensionales, la cúpula y la bóveda de crucería) era una de las principales formas estructurales, y dio lugar a un intenso trabajo tanto en la *Académie* de París como en la *Royal Society* de Londres (ambas acababan de ser fundadas cuando Blondel planteó sus problemas). En 1717, por ejemplo, Gautier (en un libro sobre puentes) enumera cinco cuestiones para que resuelvan aquellos «Sçavans» :

- el espesor de los estribos para todo tipo de puentes (¿geometría?, ¿mecánica?)
- la dimensión de las pilas intermedias en puentes de varios vanos (¿mecánica?, ¿geometría?)
- el espesor de la rosca del arco (geometría)
- la forma de los arcos (geometría, ¿mecánica?)
- las dimensiones de los muros de contención del terreno (mecánica)

Estos problemas fueron estudiados a lo largo del siglo, consiguiéndose progresos, pero sin alcanzar las soluciones finales.

Arcos

La estereotomía normalmente se entiende como la disciplina que define, mediante la geometría, el modo de corte de las piedras, de manera que puedan encajar en una forma estructural coherente. Para un arco bidimensional, con trasdós e intradós definidos, las dovelas tienen forma de cuña, con dos caras conformando el perfil del arco y las otras dos definiendo las juntas entre las piedras. Vitruvio afirma claramente que las

juntas para un arco circular romano debían ser radiales, dirigidas hacia el centro del círculo —y la prescripción sobrevive en el término inglés *centering* que denota los medios auxiliares (la cimbra) necesarios para soportar la fábrica hasta que se asienta la clave. (Los problemas geométricos que surgen al definir las dovelas no son sencillos, y son formidables cuando la estructura es totalmente tridimensional, como por ejemplo en el caso de un arco rampante esviado.)

No obstante, la palabra estereotomía tiene un contenido mucho más profundo. Las juntas radiales pueden ser «obvias» para un arco circular (si bien unas juntas ligeramente diferentes pueden resultar más racionales), pero, ¿cómo deberían plantearse las juntas entre dovelas para un arco no circular, que puede ser apuntado, y en el que trasdós e intradós no son necesariamente «paralelos»? Una afirmación estereotómica completa ha de incorporar algo más que geometría.

La Hire estudió este problema en 1695 empleando la mecánica para investigar las fuerzas internas en un arco. Para La Hire estaba claro que si no hubiera rozamiento entre dos piedras contiguas (es decir, si fueran perfectamente lisas) entonces una fuerza (de compresión) sólo podría pasar de una piedra a otra si la junta entre ellas fuera perpendicular a dicha fuerza (en ausencia de mortero, las fuerzas de tracción no son posibles —las piedras se separarían). Acometió el problema mecánico construyendo un polígono de fuerzas (con los pesos de las dovelas), y a continuación, el correspondiente polígono funicular (es decir, la cadena colgante invertida de Hooke) para el arco. Para un arco de forma definida con dovelas lisas el polígono funicular está definido, de tal forma que trabajando hacia atrás, el polígono de fuerzas se puede deducir y, finalmente, se pueden calcular los pesos de las dovelas. Ahora bien, si las líneas de arranque son horizontales, entonces los pesos de las dovelas de los arranques tienen que ser infinitos (la cadena de Hooke nunca puede llegar a ser vertical bajo cargas finitas).

La Hire se dio cuenta de que la hipótesis de juntas sin rozamiento era irreal, y abandonó el trabajo hasta 1712. Su nuevo intento introdujo el rozamiento, de modo que el deslizamiento en las juntas estaba impedido, y su análisis estaba dirigido a soluciones más representativas de la mecánica del arco, y en particular a hallar el valor del empuje en el arranque. En este momento no está interesado en la geometría; dibuja un arco semicircular de espesor constante, pero su método se puede aplicar a un arco cualquiera. Resuelve la estática del arco considerando el mecanismo de colapso, incluyendo grietas de articulación, y por lo tanto «fijando» el paso de las fuerzas internas por ciertos puntos concretos, lo que permitía escribir las necesarias ecuaciones de equilibrio.

Proyecto de estructuras

Una buena estructura ha de satisfacer muchos criterios, si bien tres son fundamentales: los criterios de resistencia, rigidez y estabilidad. Un templo griego, una catedral gótica y un arco de fábrica son claramente resistentes —no hay fallo del material; igualmente, no se deforman de un modo apreciable bajo la acción de su peso propio o de fuertes vientos— son adecuadamente rígidos. Su estabilidad estaba asegurada por geometrías correctas —las reglas numéricas habían sido validadas empíricamente. El trabajo de La Hire también trataba la estabilidad, y la introducción de la mecánica permitió obtener más información —por ejemplo, el cálculo del empuje de un arco en el arranque.

Galileo (1638) había descubierto la debilidad de las reglas de proporción —para un material de resistencia finita, si una estructura aumentara progresivamente de tamaño, se llegaría a un tamaño límite (Galileo, antes del conocimiento de los dinosaurios, imagina que el elefante es el animal más grande, terrestre, capaz de soportar su propio peso.) De hecho, este límite de tamaño estaba lejos para los materiales medievales usados en la edificación, pero Galileo fue el primero en explorar la resistencia de rotura de un estructura (implícitamente hecha de madera, aunque estudia igualmente el comportamiento de la piedra). La estructura de Galileo, una viga en voladizo, es de hecho un artificio para estudiar la resistencia a flexión de una barra prismática, y su análisis realmente debería ser clasificado bajo el título «Resistencia de Materiales» en vez de «Teoría de Estructuras». En términos modernos, Galileo había calculado la tensión de rotura a tracción de la viga, y deseaba usar este valor para calcular la rotura a flexión de esa viga. La resolución del problema es, por supuesto, brillante, si bien una constante numérica que aparece en los cálculos fue objeto de muchas discusiones a lo largo de los dos siglos siguientes.

Galileo emplea muy pocas matemáticas. Aunque

las ecuaciones algebraicas estaban adquiriendo entonces su forma moderna, Galileo emplea la teoría clásica de proporciones que se encuentra en Euclides; las ecuaciones simples de la mecánica no están aún completamente definidas (las ecuaciones de equilibrio no están completas). No obstante, sus resultados son esencialmente correctos, y académicos matemáticos en los siguientes cien años exploraron la viga en voladizo como si fuera una estructura significativa, y hallaron la forma de la viga no prismática (de sección variable) tal que fallara simultáneamente en cada una de sus secciones a lo largo de su longitud (fue el propio Galileo quien comenzó esta investigación).

Parent corrigió la mecánica de Galileo en 1713 y, de forma implícita (puesto que llevaba mucho tiempo formular tales ideas), supuso que las deformaciones por flexión son linealmente elásticas a través de la sección de la viga, y de tal forma halló un valor distinto al de Galileo para la constante en la expresión de la resistencia de rotura. Así comenzó el progreso de la ciencia de la resistencia de materiales que culminó en 1826 cuando Navier formuló la «filosofía» elástica de proyecto aplicada a la disciplina de la teoría de estructuras en su conjunto. De forma explícita, una estructura tenía que mantenerse en su rango elástico. Galileo carecía de tal conocimiento, y su trabajo estaba dirigido a hallar la resistencia a rotura más que dirigido al comportamiento de la estructura bajo una carga.

El Panteón francés

El trabajo de Parent fue ignorado, pero en 1760 las contribuciones de Galileo y La Hire (y de otros, incluyendo a Euler, Musschenbroek, James Bernoulli, Vauban, Bélidor) estaban en el programa de estudios de un curso de dos años de duración en la «Universidad» de Mézières. El cálculo infinitesimal estaba ya bien desarrollado, y se enseñaba en las clases de matemáticas. Mézières era la escuela de oficiales de los *Corps Royale du Génie*, en la que Coulomb fue admitido en 1760; se graduó en algo menos de dos años. En 1764 fue destinado a Martinica, donde permaneció durante nueve años trabajando en el proyecto y construcción de las defensas de la isla. Coulomb se dio cuenta de que lo que aprendió en Mézières no era suficiente para resolver los cuatro grandes problemas de la ingeniería civil en el siglo XVIII, todo ellos presentes en su trabajo en Martinica; durante sus nueve años de estancia en la isla realizó avances teóricos, que expuso en su *Essai* presentado frente a la *Académie* en 1773, a su regreso a París.

El título de su *Essai* era «Sobre la aplicación de las reglas de máximo y mínimo a algunos problemas estáticos, relevantes en la Arquitectura» , y los cuatro temas eran

- la resistencia de las columnas
- la resistencia de las vigas
- el empuje de los arcos
- el empuje del terreno

Estos temas hacen eco de las listas de Blondel y Gautier, si bien las nociones de geometría han desaparecido casi por completo. Las herramientas de Coulomb son las de la mecánica (ecuaciones de la estática) y del análisis (máximos y mínimos calculados mediante el uso del cálculo infinitesimal). Parece que ésta es una de las primeras ocasiones en las que un ingeniero aplica el análisis para resolver problemas que se encuentran dentro del campo de la ingeniería civil.

El artículo de Coulomb fue publicado en medio de la disputa que duró 50 años a cerca de la idoneidad del proyecto de la iglesia de Sainte-Geneviève, el Panteón francés. Las obras habían sido comenzadas por Soufflot en 1756, y en 1770 el arquitecto Rondelet estaba al cargo de la construcción (bajo la dirección de Soufflot). Ese año Patte, otro arquitecto, escribió una *Mémoire* criticando el proyecto, y en particular el proyecto de los pilares torales. Empleando únicamente argumentos geométricos, Patte encontró el proyecto de los pilares completamente inadecuado. Un año después, las opiniones de Patte fueron refutadas por Gauthey, un ingeniero, quien empleó argumentos derivados de conocimientos de mecánica. Estos juicios «técnicos», basados en consideraciones de la estática, son claramente superiores a los argumentos basados en reglas de proporción. Desafortunadamente para la opinión superior, en 1776 aparecieron daños en los pilares «inadecuados». Lo cierto fue que, tal como se percató Rondelet (y sus opiniones fueron publicadas en una *Mémoire* posterior en 1798), los pilares estaban dañados por culpa de su deficiente construcción en vez de por su deficiente proyecto. No obstante, Rondelet carecía de los

conocimientos otorgados por la mecánica, y no se alcanzó una solución inmediata de la disputa. La *Académie* (por aquel entonces *Institut*), de la que Coulomb era miembro (aunque aparentemente no desempeñó parte alguna en las discusiones), nombró comités —de arquitectos, reforzados por ingenieros, y de nuevo reforzados por matemáticos. Finalmente, a comienzos del siglo XIX se comenzaron los trabajos de restauración y Rondelet recreció los cuatro pilares torales.

Rigidez

Galileo no estudió la deformación de su viga en voladizo y, de hecho, previo a la invención del cálculo infinitesimal, esto hubiera sido casi imposible. No obstante, James Bernoulli había llegado a dominar el uso de esta nueva herramienta y en 1691 dio con una hipótesis (que, una vez más, publicó en forma de logogrifo por miedo a la piratería): la curvatura de una banda uniforme (elástica) es proporcional en cada sección al momento flector en dicha sección. Por lo tanto, partiendo de un (hipotético) problema en la mecánica, el problema completo de la «elástica» se convirtió en una investigación puramente matemática, culminando en el análisis definitivo de Euler en 1744. Las matemáticas eran difíciles y complejas, implicando soluciones con forma cerrada de ecuaciones diferenciales de cuarto grado en términos de las nuevas funciones matemáticas, y las formas obtenidas claramente no eran representativas de nada que pudiera ser útil en la arquitectura. Sin embargo, Euler introdujo algunas ecuaciones de la mecánica en su trabajo, y vio que la más mínima deformación de una banda inicialmente recta únicamente podía ser mantenida en presencia de una determinada carga. En efecto, una columna permanecería recta bajo una carga axil hasta que la carga alcanzara un cierto valor límite, la «carga de pandeo» de Euler. Este concepto, comprendido en su totalidad por el propio Euler, es por supuesto de una importancia fundamental en todo proyecto estructural que incluya la posibilidad de pandeo.

Escolio

A mediados del siglo XVIII la herramienta del análisis se había sumado a las de la geometría y la mecánica, y todo estaba preparado para el desarrollo de una teoría de estructuras reconociblemente moderna. La descripción de la deformación se convirtió, en manos de Navier, en uno de los tres ingredientes esenciales de la teoría (elástica), siendo los otros dos las ecuaciones de la estática y la determinación de las propiedades del material —por ejemplo, la ley de Hooke.

Una estructura estáticamente determinada, isostática, se puede «resolver» —es decir, se pueden hallar las resultantes de las tensiones internas— mediante el uso de las ecuaciones de la estática. Euler se había percatado de que había estructuras (y es el caso más común) para las que las ecuaciones de equilibrio no eran suficientes —la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática. Euler anticipó el programa de Navier presentando un sencillo caso particular (una mesa de cuatro patas) —las ecuaciones de equilibrio, deformación y propiedades del material aportarán, juntas, suficiente información para la resolución de una estructura hiperestática.

Navier expuso su programa para el cálculo colocando un apoyo rígido bajo el extremo libre de la viga en voladizo de Galileo. Cuando la viga está sometida a una carga transversal determinada, se induce una fuerza en el apoyo, pero las ecuaciones estáticas (mecánica) no permiten hallar su valor. No obstante, las resultantes de las tensiones internas (momentos flectores) se pueden calcular en función de una fuerza desconocida. De la ecuación diferencial de segundo orden de la flexión (análisis) se puede obtener la forma deformada de la viga (geometría), aún en función de la fuerza desconocida. Finalmente, las deformaciones calculadas han de ser tales que se satisfagan las condiciones de contorno —la deformación de la viga ha de ser cero en el apoyo rígido. Esta condición completa la solución.

Llevó más de un siglo —y la disputa aún continúa— reconocer que la solución de «Navier» no se puede observar en estructuras reales. El fallo reside en las suposiciones sobre las condiciones de contorno —el apoyo bajo la viga de Galileo no es completamente rígido, las cimentaciones de un edificio porticado asentarán ligeramente, los estribos de un puente se moverán bajo la acción del empuje del arco. Desplazamientos minúsculos de este tipo tienen un gran efecto en el estado interno de la estructura. Además, es imposible especificar los pequeños movimientos impuestos por el entorno, y es por lo tanto

imposible, en la realidad, hacer cálculos que describan el estado «real» de la estructura.

Es extraordinariamente interesante que Coulomb, en su discusión sobre el comportamiento del arco, no intente describir el estado real. En vez de eso, su aplicación de las «reglas de máximo y mínimo» le permiten establecer límites superior e inferior de las cantidades estructurales —por ejemplo, del valor del empuje en los apoyos.

Del mismo modo, el técnico en estructuras puede obtener un proyecto seguro de una viga empotrada-apoyada como la de Galileo, incluso siendo imposible determinar su comportamiento real. Se hace uso de la teoría plástica moderna, en la que (para este simple ejemplo) se excluye el uso del análisis. En vez de eso, se escriben las ecuaciones de la estática y la distribución no-única (para una estructura hiperestática) de las tensiones internas se manipula de manera que los límites de tensión del material no se superen. No se hace referencia a las deformaciones ni a las condiciones de contorno; el uso exclusivo de la mecánica (las ecuaciones de equilibrio y las propiedades límite del material) proporciona un potente método para el proyecto seguro de un amplio rango de tipos de estructuras.

25
El arquitecto y el ingeniero

En la Antigüedad y el medievo, y hasta el Renacimiento, las palabras «arquitecto» e «ingeniero» no tenían el significado de hoy en día. Las obras estaban en manos de los «constructores», y cualquiera de estas palabras podría utilizarse para describir su profesión. El cambio profundo de la práctica medieval a la moderna se puede datar con precisión en Inglaterra, donde el Renacimiento llegó tarde.

Antes del Gran Incendio de Londres, en 1666, la construcción se encontraba bajo el control de maestros medievales, maestros en el sentido estricto de la palabra: hombres que habían empezado en las obras como aprendices y se habían abierto camino en las «logias» pasando por las categorías de oficial y capataz, hasta alcanzar el puesto en el que podían hacerse cargo de un proyecto importante. Un maestro medieval podía ofrecer un servicio completo de proyecto y construcción y con frecuencia era el propietario de una cantera, por lo que utilizaba su propia piedra. El Gran Incendio generó tanto trabajo de nueva construcción que los métodos utilizados hasta entonces resultaron inadecuados y la forma medieval de construir tuvo forzosamente que ser abandonada. En lugar del maestro de obras que trabajaba de forma autónoma, surgió el «arquitecto caballero», dispuesto y capaz de proyectar un edificio aunque él mismo nunca hubiese trabajado en una obra. Además, este tipo de arquitecto profesional trabajaba con unas condiciones de contrato diferentes. El maestro medieval no sólo era responsable del proyecto, sino que también asumía la responsabilidad económica de la obra. El nuevo arquitecto «renacentista» controlaba las operaciones de construcción, pero no estaba involucrado financieramente, y los contratos (muy parecidos a los contratos actuales) eran otorgados a equipos de obreros que, casi siempre eran los mismos maestros y trabajadores que habían formado las «logias de constructores». Ahora se sentían a gusto trabajando de esta nueva forma, sin tener que implicarse financieramente en las obras.

El arquitecto-caballero inglés por antonomasia es, sin duda, Christopher Wren, un profesor de astronomía de la Universidad de Oxford. No fue el único que probó a hacer arquitectura, incluso antes del Gran Incendio; otros que, como Wren, poseían ediciones ilustradas de tratados, en latín o italiano, y que eran eruditos en los estilos del Renacimiento (sobre todo de Palladio), estaban en condiciones de realizar proyectos adecuados y «correctos». Un precursor de este tipo de arquitecto moderno es Íñigo Jones, buen conocedor de las proporciones clásicas, que utilizaba en sus proyectos de escenografía, quien no encontró dificultad en transferir esos proyectos al mundo real. En palabras de Harvey: «Las reglas góticas eran tan complicadas que nadie que no hubiese seguido un largo aprendizaje y hubiese pasado varios años de práctica podría dominarlas; sin embargo, las reglas de Vitruvio eran tan

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The Architect and the Engineer». En: *Geometría y proporción en las estructuras. Ensayos en honor de Ricardo Aroca*. ed. por P. Cassinello, S. Huerta, J. M. de Prada y R. Sánchez. (Madrid: Lampreave, 2010): 255–261. Traducción de Rosa Ana Guerra Pestonit.

fáciles de interpretar que incluso los obispos podían entenderlas, y los príncipes, probar a hacer sus propios diseños» (Harvey 1958).

En 1663, antes del Gran Incendio, cuando Wren tenía 31 años, su tío le encargó el proyecto de una nueva capilla para Pembroke College en Cambridge; esta fue la primera incursión de Wren en la arquitectura. Como Grimstone ha expuesto (Grimstone 2009), el proyecto de Wren se basaba claramente en planos anteriores de Edward Pearce, y parece evidente que Wren (que había cometido algunos pequeños errores estilísticos) adquirió mucha experiencia con su maestro «medieval». (Pearce trabajó en la capilla de Pembroke y, más tarde, como contratista para Wren en la catedral de San Pablo.) Wren estaba aprendiendo, no por el camino de los aprendices medievales, sino a través de un constructor experto que sí había pasado por esa formación práctica.

El ingeniero

El ingeniero de estructuras moderno también nació con el Gran Incendio, aunque su papel en la construcción tardó más en definirse que el del arquitecto moderno. El ingeniero surgió con más lentitud porque en realidad, en la arquitectura renacentista no hay problemas de ingeniería, con la única excepción de los proyectos de cúpulas. Es significativo que no se construyeran cúpulas en Inglaterra hasta que el propio Wren las utilizó (tras haberlas visto en una breve visita a París en su juventud); como matemático que era no necesitaba el asesoramiento de ningún experto (excepto el que le proporcionó Robert Hooke).

Una visión simplista de un ingeniero es, quizás, la de alguien que realiza cálculos, mientras que un arquitecto se considera que trabaja de forma creativa y artística, sin las limitaciones de los números. Esta visión del arquitecto es sin duda errónea, tanto en la actualidad como históricamente: las reglas de Vitruvio pueden ser fáciles de entender, pero la mayoría son reglas numéricas. Es interesante rastrear lo que las matemáticas han aportado al proyecto estructural, desde la aritmética de Vitruvio hasta el extraordinario arsenal desplegado por el ingeniero moderno.

Se pueden identificar tres ramas particulares de las matemáticas: la geometría, la mecánica y el análisis. La palabra «geometría» implica reglas, racionales o empíricas, que crean formas, tanto globales (como el perfil de un arco), como de elementos estructurales (como las relaciones entre altura y espesor que Vitruvio indica para las columnas o para sus éntasis). Este tipo de reglas se encuentran en el proyecto de arquitectura desde hace miles de años, desde la Antigüedad hasta el siglo XVII. Fue entonces cuando apareció la «mecánica» y comenzó a utilizarse para intentar calcular las fuerzas internas en una estructura, para comprobar su resistencia y sus deformaciones, y para estimar las fuerzas que podría transmitir a su entorno. Finalmente, la palabra «análisis», cuando se utiliza en su sentido matemático, implica el uso de métodos algebraicos y en particular del cálculo infinitesimal.

Robert Hooke fue un científico y el primer secretario permanente de la recién creada Royal Society (una institución que logró mantenerse al final del siglo XVII sólo gracias al empeño de Hooke). También él era un arquitecto-caballero, de hecho, fue uno de los «socios» de Wren, y posiblemente más interesado que Wren en el dominio de los detalles prácticos de la construcción. Su enunciado magistral sobre el equilibrio del arco de fábrica muestra las tres ramas de las matemáticas expuestas anteriormente: «Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». Esta es en realidad una afirmación medieval de *geometría*; si se fija un conjunto de pesos a una cadena fina, entonces la forma de la cadena, invertida, proporciona la forma del arco perfecto para soportar esos mismos pesos. Es más, la *mecánica* de la cadena colgante (es decir, la determinación de las fuerzas, no fácil, pero sí posible en 1675) proporcionará el valor de la tracción horizontal en los extremos de la cadena, y, por lo tanto, el valor del empuje horizontal del arco correspondiente. (El cálculo del empuje en los estribos fue uno de los principales objetivos del análisis de los arcos de fábrica a partir del siglo XVII.) Sin embargo, Hooke no podía afrontar el *análisis*; había «resuelto» el problema del arco, pero era incapaz de determinar matemáticamente la forma de la cadena colgante, ni utilizando la geometría clásica, ni el nuevo cálculo infinitesimal.

A pesar de esto, Hooke afrontó el problema mucho más difícil de la forma perfecta de una cúpula de fábrica de espesor constante (como el caso de la cúpula más interior de las tres que se superponen en la catedral de San Pablo de Wren, en construcción en aquel momento). Hooke mantuvo, sin demostración (y no había demostración), que el perfil debería ser el de una parábola cúbica, que está muy cerca del perfil

teórico, mucho más complejo (Heyman 1998b). Wren adoptó este perfil; la cúpula de San Pablo se debe al «ingeniero» Robert Hooke.

Geometría

Las reglas de la construcción, desde antes de Ezequiel (siglo VII a.C.), pasando por Vitruvio y el gótico, e incluyendo parte del Renacimiento, eran fundamentalmente reglas de proporción, por lo tanto, geométricas. Cualquier noción de mecánica está ausente, aunque los constructores sabían perfectamente que la construcción podría necesitar estribos, y que las cimentaciones tenían que ser proyectadas con cuidado. Para un ingeniero moderno, acostumbrado a realizar cálculos relacionados con la resistencia, parece extraño que unas reglas de proporción sirvan para crear estructuras correctas. En realidad, prescindir de las propiedades del material es lo adecuado en la construcción de fábrica; la piedra utilizada en los templos griegos y en las catedrales góticas está sometida a tensiones muy bajas. (Heyman 1995). La forma de la estructura es de crucial importancia. Por eso no hay por qué dudar de la afirmación de Vasari de que Brunelleschi, en el siglo XV, utilizó modelos hechos con nabos para decidir las formas correctas para la fábrica de la cúpula de Florencia.

Las reglas antiguas de los templos griegos y romanos (como el templo de Afaia, en Egina, figura 25.1) especificaban límites en las proporciones entre la altura y el diámetro de las columnas —Vitruvio aporta valores adecuados para los diferentes órdenes. De igual manera, las limitaciones en el ancho de los intercolumnios aseguraban que se pudiesen utilizar como arquitrabes piezas monolíticas de un tamaño razonable. Estas reglas se establecieron de forma empírica: los templos construidos de acuerdo a las reglas habían demostrado ser adecuadamente estables y tener, además, una gran resistencia a los terremotos.

De igual manera, el arco romano semicircular dio lugar a la bóveda de cañón románica y a la bóveda de crucería sobre crujías cuadradas (en las naves laterales, por ejemplo). La gran invención del gótico fue el arco apuntado, no circular, que permitía cubrir espacios rectangulares con bóvedas. La crujía típica de la

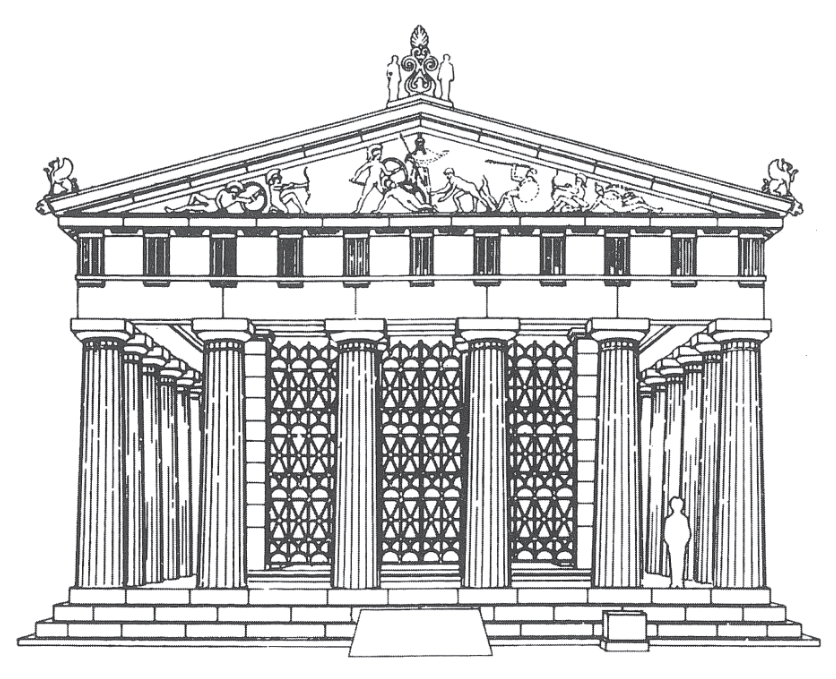


Figura 25.1
El templo de Afaia, 490 a.C. Las proporciones de este tipo de templos fueron codificadas por Vitruvio

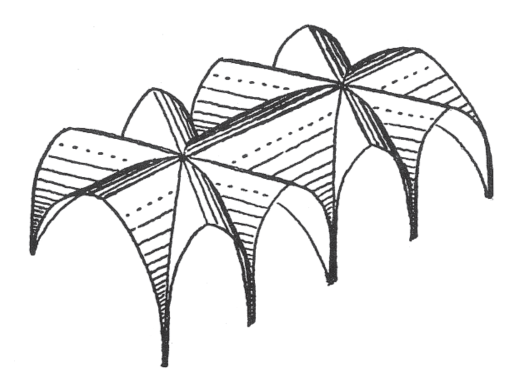


Figura 25. 2
La bóveda sexpartita cubre dos tramos de la nave o la cabeza de una iglesia, y se repite cada dos tramos

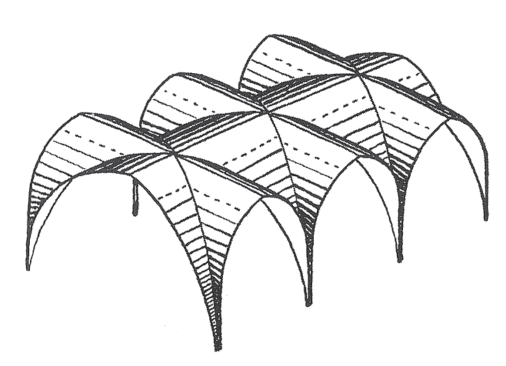


Figura 25. 3
Bóveda cuatripartita, repetida cada tramo en la nave o la cabecera

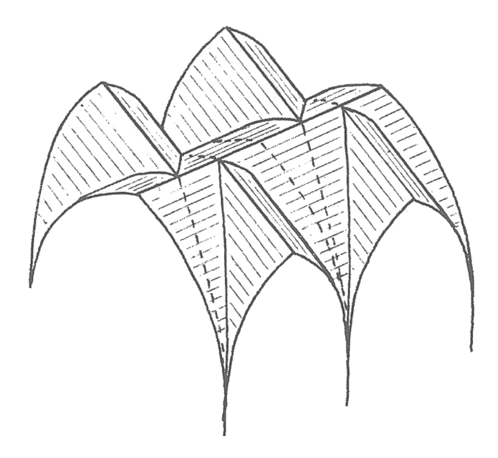


Figura 25. 4
«Bóveda loca» de la catedral de Lincoln, ca. 1200

cabecera o de la nave de una gran iglesia podría tener una proporción entre sus lados de dos, de forma que dos crujías formaban un cuadrado en planta; por eso algunas de las primeras bóvedas góticas son sexpartitas, (figura 25.2).

En poco tiempo, sin embargo, la bóveda cuatripartita «clásica» (figura 25.3) se convirtió en la norma. Estas bóvedas evolucionaron con apenas pequeños cambios en Francia. Sin embargo, al exportarlas al resto de Europa, se transformaron hasta hacerse casi irreconocibles, como ocurre en las bóvedas estrelladas y reticuladas de Bohemia, o en las bóvedas de ligaduras y de abanico en Inglaterra.

Bajo la desconcertante multiplicación de nervios, sin embargo, subyace una forma geométrica básica casi invariable; si se adopta esta forma (por supuesto sin cálculos de «ingeniería») el arquitecto tiene casi libertad ilimitada en el proyecto, con la seguridad de que su construcción se mantendrá en pie. Un sencillo ejemplo de los más antiguos sería la llamada «bóveda loca» de la catedral de Lincoln (figura 25.4), que puede chocar visualmente, pero que es perfectamente estable.

Mecánica

Las reglas geométricas —las reglas de proporción— afectan únicamente a la forma; no hacen referencia a la escala, por lo que una estructura, en teoría, podría construirse de cualquier tamaño. Galileo en 1638 rebatió esta idea: para un material de resistencia finita tendría que haber un límite de tamaño, y Galileo suponía que el elefante era el animal más grande de la tierra capaz de soportar su propio peso. En realidad, para los materiales medievales utilizados en la construcción, el límite estaba muy lejano, y sin embargo, Galileo fue el primero en analizar la resistencia a rotura de un elemento estructural, una sencilla viga en ménsula. El análisis consiste en la determinación de la resistencia a flexión de una barra prismática: se trata más de un problema de «resistencia de materiales» que de «teoría de estructuras».

Galileo utilizó pocas matemáticas. Aunque las ecuaciones algebraicas estaban adquiriendo su forma actual, recurrió a la teoría clásica de las proporciones que se encuentra en Euclides. Las ecuaciones básicas de la mecánica sólo se habían desarrollado parcialmente. Trabajos posteriores (por ejemplo Parent en

1713) hicieron un uso más amplio de las ecuaciones de la estática para resolver el problema de Galileo (Heyman 1998a). Sin embargo, fue La Hire (en 1695 y posteriormente) quien aplicó la mecánica (en la forma de ecuaciones de la estática) a la solución de un problema estructural, en concreto, el del comportamiento del arco de fábrica. Esta investigación se convirtió en uno de los mayores retos del siglo XVIII, y se consiguieron avances importantes utilizando únicamente las sencillas ecuaciones de la estática. Sin embargo, hacia finales de siglo, Coulomb introdujo el «análisis» en la discusión del comportamiento del arco (Heyman 1972).

Análisis

La Mecánica, expresada como las sencillas ecuaciones de la estática aplicadas a arcos, trata fundamentalmente con elementos estructurales discretos. Las ecuaciones establecen el equilibrio, tanto para el conjunto de la estructura, como para elementos de dimensiones finitas (como por ejemplo las dovelas de un arco). El cálculo infinitesimal, que se acababa de inventar, trataba, sin embargo, con cantidades que variaban continuamente con la posición (o con el tiempo: podía aplicarse al estudio de la trayectoria de proyectiles).

En las estructuras, el cálculo infinitesimal permitía determinar, por primera vez, la forma que adoptaría un elemento inicialmente recto al ser sometido a una carga. Antes del desarrollo de esta herramienta fundamental de análisis, solo se podía intuir la forma de una viga sometida a flexión. Pero una vez que James Bernoulli estableció que la curvatura de un elemento elástico en cualquier sección era proporcional al momento flector en esa sección, se pudieron escribir las ecuaciones diferenciales, y eminentes matemáticos (sobre todo Euler, en 1744) se recrearon en el reto que suponía obtener sus soluciones. En realidad, estas matemáticas «puras» resultaron de una gran importancia práctica y permitieron que se pudieran abordar los problemas de pandeo y estabilidad.

La teoría de las estructuras

Los nuevos materiales estructurales —el hierro, y más tarde el acero y el hormigón armado—, trabajaban a esfuerzos más cercanos a su límite resistente que los materiales tradicionales, piedra y madera. El análisis de las fuerzas en las estructuras se volvió crucial y el ingeniero se convirtió en el responsable del proyecto de la estructura, mientras que el arquitecto se mantenía ocupado con los aspectos conceptuales y estéticos.

Sin embargo, los científicos del siglo XVIII, siguiendo a La Hire, se dieron cuenta de que muchas estructuras (en realidad, la mayoría) no se podían examinar matemáticamente utilizando sólo las ecuaciones de la *mecánica*. El *análisis* de las deformaciones introdujo un conjunto nuevo de ecuaciones, que sumadas a las ecuaciones de la estática (y a la Ley de Hooke de la elasticidad), permitieron formular la teoría «clásica» de estructuras, que ha sido fundamental desde los tiempos de Navier, a principios del siglo XIX (Heyman 1998a). Una parte esencial de esta teoría consiste en el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad: los elementos de una estructura deben mantenerse unidos tras la deformación, y los movimientos globales de la estructura están limitados en los puntos de contacto con su entorno. Por lo tanto, cuando se hace un análisis elástico clásico de un arco de fábrica de un puente (por poner un ejemplo sencillo), se supone que los estribos son rígidos. Pero en realidad los estribos de un puente siempre ceden ligeramente. Hasta el siglo XX no se descubrió que incluso pequeños movimientos de ese tipo cambiaban totalmente las fuerzas internas en la estructura. Las fuerzas que se obtienen del análisis elástico no se pueden observar en ninguna construcción real. Es más, los pequeños movimientos que impone el entorno no se pueden predecir y, por tanto, es imposible calcular cuál es el estado «real» de una estructura.

Se aprecia una paradoja, ya que podría parecer de forma intuitiva que pequeños «defectos» no deberían afectar a la resistencia de una estructura real. Esta intuición del sentido común es correcta, de lo que se deduce que el análisis elástico es un mal predictor de la resistencia. En la última mitad del siglo XX ha surgido el método «plástico» de análisis (llamado también análisis límite o análisis de equilibrio), en que no se hace referencia a las deformaciones o a las condiciones de contorno. De este modo se eliminan los elementos que habían conducido a la paradoja anterior, y las únicas consideraciones son las relativas al equilibrio (mecánica) y a la resistencia última de los materiales de construcción.

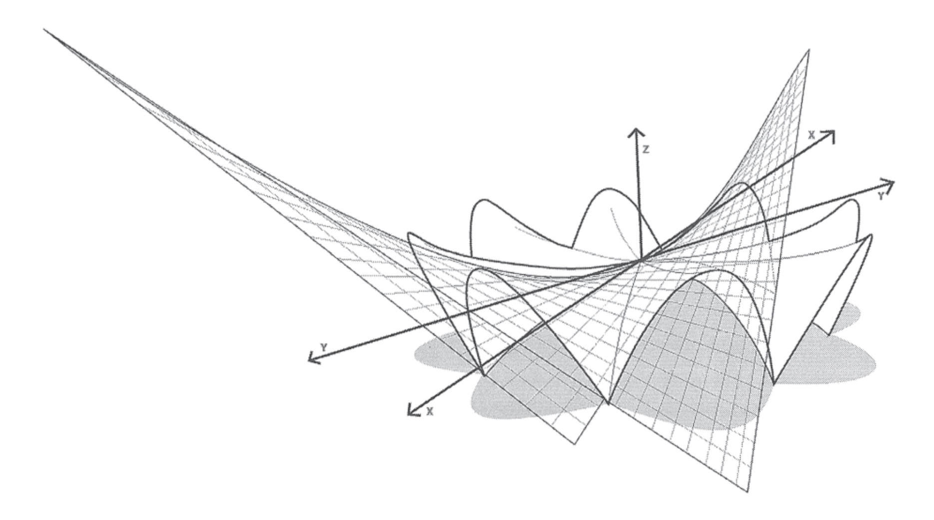


Figura 25. 5
Paraboloides hiperbólicos del restaurante Los Manantiales, Xochimilco, México. Félix Candela, 1958

La búsqueda de la descripción del estado real de la estructura se abandona, pues se trata de un problema imposible de resolver. Sin embargo, se han establecido teoremas completamente nuevos sobre el comportamiento estructural con los que se pueden obtener estimaciones muy precisas de la resistencia de una estructura. Para el cálculo y proyecto de una estructura moderna de acero u hormigón la tercera de las disciplinas matemáticas, el análisis, apenas se emplea. Para el proyecto de una estructura de fábrica, sin embargo, la geometría es fundamental.

El arquitecto como ingeniero

Algunos arquitectos del siglo pasado no se sometieron a las teorías desarrolladas por los ingenieros estructurales del siglo XIX. El más destacado de estos maestros es Gaudí, cuyos modelos tridimensionales de cadenas colgantes revelan la forma del esqueleto de sus construcciones y recuerdan la solución bidimensional de Hooke para el arco. Gaudí revistió sus esqueletos con fábrica, poniendo en evidencia la estrecha relación entre forma y función. Esto le dio libertad para embellecer sus estructuras con decoraciones fantásticas. El *rationalisme* del gótico de Viollet-le-Duc, en el que cada elemento debe desempeñar una función práctica, no impide la aportación «artística» al proyecto, del mismo modo que los capiteles dóricos del templo de Afaia (figura 25.1) podrían sustituirse por otros con volutas jónicas u hojas de acanto corintias sin que se alterase la forma estructural del templo.

Los edificios de Gaudí son la pura expresión del equilibrio, al igual que los paraboloides hiperbólicos de otro gran maestro, Félix Candela. El comportamiento de esas finas cáscaras de hormigón armado está guiado por la geometría y la estática, y se expresa con ecuaciones analíticas sencillas y bellas, que crean edificios sencillos y hermosos (figura 25.5).

Algunos ingenieros también parecen haberse liberado de su formación anterior: Torroja, Nervi, Heinz Isler. Frecuentemente se les describe como arquitectos. Y es que la diferencia entre las dos profesiones se ha vuelto borrosa de nuevo, como ya había ocurrido antes del Renacimiento.

26

Análisis de membrana de cáscaras delgadas de fábrica

Las tensiones en las fábricas son usualmente muy bajas si se comparan con la resistencia básica del material. Así, el análisis de una estructura de fábrica se ocupa principalmente de la determinación de un sistema de fuerzas que equilibren las cargas dadas —calcular, por ejemplo, el empuje de las altas bóvedas para conocer las fuerzas que actúan sobre el sistema de contrarresto. Este trabajo trata del empleo de las ecuaciones de la teoría de la membrana a la hora de analizar este tipo de bóvedas. Estas ecuaciones muestran que existe una profunda diferencia en el comportamiento de las cúpulas y las bóvedas de abanico. En particular, indican que una cúpula de fábrica se puede construir con relativa facilidad, mientras que una bóveda de abanico precisa una elaborada cimbra que soporte la fábrica hasta que se cierra un tramo completo.

Análisis elástico

Las ecuaciones de equilibrio son de suma importancia en cualquier análisis estructural; las fuerzas estructurales internas (resultantes de tensiones) deben equilibrar las cargas exteriores conocidas. Sin embargo, en general, estas ecuaciones no determinan los valores de las resultantes de tensiones; sólo si la estructura es «estáticamente determinada» (isostática) existe una solución única. Para la estructura hiperestática general se necesita más información. El método «clásico» (elástico), habitual en los dos últimos siglos, introduce información acerca de las propiedades del material de la estructura, de modo que las deformaciones internas pueden calcularse en términos de valores (todavía desconocidos) de las resultantes de tensiones (Heyman 1998a; Heyman 2008). Por último, un tercer conjunto de ecuaciones relaciona esas deformaciones internas (pequeñas) con los movimientos de la superficie de la estructura, y estos movimientos deben satisfacer las «condiciones de contorno» especificadas —por ejemplo, que la estructura se apoya en el entorno en una serie de lugares conocidos. Este método en efecto conduce a la determinación de un «estado» de la estructura, es decir, se calculan los valores de las resultantes de tensiones y de las deformaciones.

Por desgracia, se sabe hace ya casi un siglo que estos valores calculados de las cantidades estructurales son muy diferentes de los observados en la estructura real, y que esta diferencia se debe a la formulación de las «condiciones de compatibilidad». Por ejemplo, se considera que la estructura está soportada en un cierto lugar por un apoyo rígido; pero, en realidad, el apoyo no es exactamente rígido, ni se encuentra (en la estructura construida) precisamente en el punto supuesto. También puede ocurrir que los elementos de la estructura han sido fabricados con errores dimensionales

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Membrane analysis of thin masonry shells». En: *Nuts and Bolts of Construction History. Culture, Technology and Society*, editado por R. Carvais et al. (Paris: Picard, 2012) vol. 1: 281–289. Traducción de Alejandra Albuerne Rodríguez.

muy pequeños, y de nuevo la construcción resultante difiere de la considerada por el analista. Resulta que anomalías muy pequeñas de este tipo tienen un efecto muy grande en los cálculos; la estructura real es casi (pero no del todo) rígida, y errores de unos pocos milímetros alteran profundamente su estado. Además, estas anomalías son desconocidas e incognoscibles; los errores de fabricación son impredecibles, y también lo son la ubicación y las propiedades de los soportes de la estructura.

De hecho, no hay manera de determinar unívocamente el estado «real» de una estructura en respuesta a las cargas exteriores.

Análisis plástico

El análisis plástico abandona la búsqueda de un estado real. Se invierte (de manera trivial) el objetivo del estudio estructural; en lugar de preguntarse cómo la estructura se mantiene en pie, el analista plástico se pregunta cómo puede hundirse. La atención se concentra en los posibles estados de colapso, y se descubre que las «condiciones de compatibilidad» ya no juegan un papel en el análisis; en cambio, las ecuaciones de equilibrio, junto con un conocimiento de las tensiones límite que puede tolerar un material dúctil, bastan para dar estimaciones precisas y exactas de las cargas de colapso. La calidad de la ductilidad es importante pero no es restrictiva; cualquier material que un proyectista razonable utilizaría (acero, aluminio, hormigón armado, fábrica) tiene las propiedades requeridas (carecen de ellas, por ejemplo, el hierro fundido y el vidrio).

Análisis de equilibrio

La teoría plástica es simple y elegante, y da lugar a potentes teoremas estructurales. Uno de ellos es el teorema de la unicidad —si el proyectista ha encontrado una solución, esa noche no va a perder el sueño; no hay posibilidad de que se produzca un estado más crítico que lleve al colapso. El estudio del colapso ha dado lugar a varias designaciones, como «método de los mecanismos» o «cálculo límite», y un segundo teorema (el teorema de la inseguridad), obliga, en este enfoque, al calculista a investigar todos los posibles modos de colapso, para identificar los más críticos .

Resulta quizá desafortunado que los métodos plásticos se hayan identificado con el estudio del colapso. Aunque el objetivo del proyecto se ha invertido, es un hecho que una estructura en la práctica tiene que ser necesariamente viable. En esta situación, el tercer teorema plástico se convierte en todopoderoso; el «teorema de la seguridad» afirma que basta con encontrar sólo uno, entre un número posiblemente infinito, de los estados de equilibrio con los que la estructura se encuentra «cómoda». Si el proyectista puede encontrar un estado así, entonces no hay posibilidad de colapso. (Es por esta razón que el cálculo elástico convencional es seguro. El proyectista ha encontrado un estado que, a pesar de que no se puede observar, resultaría confortable para la estructura.) En la práctica, lo que se necesita son las ecuaciones de equilibrio y el conocimiento (numérico) del valor de la tensión límite a la que puede trabajar el material. (Como se verá, cuando se aplica a la fábrica, este requisito del material es trivial.) En el presente artículo se estudian las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la membrana de las cáscaras, y se aplican los resultados a diversas formas sencillas de bóvedas de fábrica.

La fábrica

Los supuestos y las limitaciones del análisis de las fábricas son bien conocidos (Heyman 1995). La fábrica está hecha de ladrillos, rasillas, bloques de piedra o incluso adobe, que, individualmente, son capaces de resistir tanto fuerzas de tracción como de compresión. Sin embargo, estos elementos se ensamblan en estructuras con un mortero débil o sin mortero alguno, y es habitual suponer que este tipo de estructuras son incapaces de transmitir fuerzas de tracción. La compresión puede pasar de un elemento a otro, pero las fuerzas entre elementos no pueden convertirse nunca en tracciones. Por otra parte, las tensiones de compresión son extraordinariamente bajas incluso en las grandes estructuras de fábrica (una iglesia importante, un puente de gran luz), y se pueden extraer conclusiones útiles y válidas suponiendo que el material es infinitamente resistente. (En algunos casos, muy raros, es posible que haya que estudiar las consecuencias de esta suposición, y ajustar los cálculos en consecuencia.) Consideremos un sencillo arco de dovelas (figura 26.1) que se ha construido sobre una cimbra (necesaria hasta que se

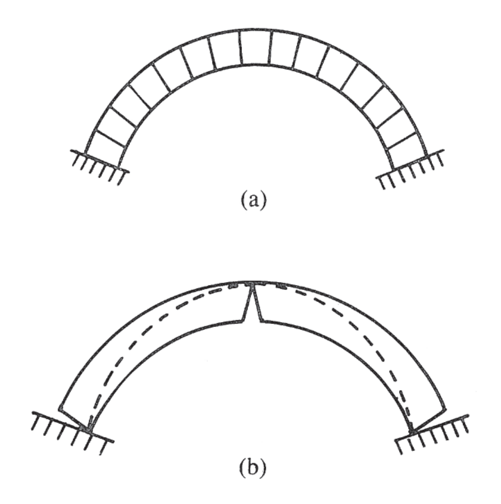


Figura 26.1
Respuesta de un arco de fábrica a un incremento de la luz

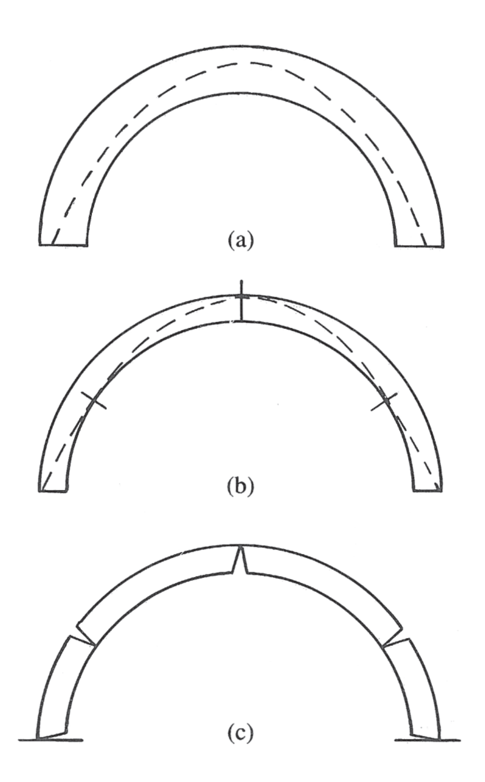


Figura 26.2
(a) Arco estable; (b) arco semicircular de espesor mínimo; (c) estado de colapso del arco anterior

coloca la clave); cuando se baja la cimbra, los apoyos del arco inevitablemente ceden, y el arco responde al consiguiente incremento de la luz creando grietas (articulaciones), figura 26.1(b). Es importante señalar que este agrietamiento no es el resultado de «tensiones»; se trata de un ajuste geométrico a una pequeña deformación (desconocida). Además, el estado agrietado que se muestra en la figura 26.1(b) no es «crítico», representa sencillamente un arco triarticulado, una estructura isostática completamente satisfactoria.

La línea discontinua en la figura 26.1(b) indica la trayectoria de las fuerzas dentro de la fábrica, y podemos llamarla (con cierta imprecisión) «línea de empujes». Se debe tener algún cuidado al estudiar esta línea (Heyman 2009), pero, en esencia, representa la forma invertida de la cadena colgante de Hooke, es decir, la forma que tomaría una cadena flexible cuando se carga con los pesos de las dovelas del arco (de manera general, junto con cualesquiera cargas externas impuestas). La figura 26.2(a) representa una solución «segura» para el arco; la cadena invertida de Hooke se puede acomodar dentro del perfil del arco, y aunque su posición no se puede determinar, el arco está en una situación confortable. Resulta evidente que habrá un espesor mínimo para el arco; la figura 26.2(b) muestra un arco de medio punto con el espesor mínimo para que la línea de empujes esté contenida justo dentro de su espesor. La relación del radio con el espesor del arco, *R*/*t*, está en torno a diez; no se puede construir un arco más delgado.

Cáscaras delgadas

La cáscara interior de la triple cúpula de la Catedral de San Pablo de Londres está formada por dos hojas de ladrillo, con un espesor total (*t*) de unos 460 mm (Campbell 2007). La cúpula tiene una luz de unos 37 m; no es una semiesfera completa, y su radio es de alrededor de 22 m. Tal y como se indica más adelante, la cúpula no es estrictamente esférica, sino que sus meridianos siguen la ecuación de una parábola cúbica. Sin embargo, su sección se aproxima a la de

un círculo perfecto, y el radio de curvatura (*R*) se encuentra, de hecho, en el rango de (digamos) 23 m. Por lo tanto, el cociente *R/t* para esta cúpula de San Pablo es de aproximadamente 50. A modo de comparación, una cúpula tabicada de pequeñas dimensiones en Sahagún (España), prácticamente coetánea con San Pablo, tiene una luz de unos 7 m, y las dos hojas de ladrillo que forman la cáscara tienen un espesor total de 100 mm. Por lo tanto, *R/t* para esta cúpula tiene un valor de 35 (Huerta y Fuentes, 2010). Para un huevo de gallina con un espesor que ronda 0,4 mm, la proporción correspondiente es de aproximadamente 100.

El término «cáscara delgada», estructura a la que se puede aplicar el análisis según la teoría de la membrana, se emplea normalmente para referirse a superficies que tienen un valor de *R/t* mayor de 20, de forma que, *prima facie*, parecería posible emplear la teoría de membrana para tener una idea sobre el comportamiento de la cúpula de San Pablo. Ciertamente, dicho análisis se puede extender a un espectro mucho más amplio de abovedamientos de fábrica, incluyendo las bóvedas cuatripartitas góticas, las bóvedas de abanico y las agujas cónicas.

Teoría de la membrana

El análisis de una cáscara delgada mediante la teoría de la membrana supone que la cáscara tiene un espesor infinitamente pequeño, de manera que la geometría queda definida de forma exacta. Más aún, se supone que las tensiones perpendiculares a la superficie de la cáscara no son posibles y que, además, no puede haber flexión en la cáscara. Existe, de hecho, un conocido estado tensional plano (bidimensional) que consta de dos componentes directas de tensión (normal) y una tensión de cortante (tangencial). Tal y como ocurre en el análisis convencional para un estado plano de tensiones, estas componentes se pueden determinar a partir de una única función de tensión ϕ, que puede hallarse mediante la ecuación de equilibrio

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2B\frac{\partial^3\phi}{dxdy} + C\frac{\partial^3\phi}{dy^3} = \textit{términos de carga} \quad (1)$$

Una vez hallada la función ϕ para una superficie determinada mediante esta ecuación diferencial en derivadas parciales, pueden obtenerse a continuación las tensiones en la cáscara (Heyman 1977).

Los coeficientes *A*, *B* and *C* son funciones conocidas de las coordenadas (*x,y*), siendo simplemente expresiones analíticas de la geometría de la cáscara. Son, en esencia, las curvaturas de la superficie en el punto objeto de análisis. En cada punto hay, de manera general, dos líneas (curvas) que se intersecan en ángulo recto (y que no necesariamente coinciden con las direcciones elegidas para *x* e *y*) a lo largo de las cuales la curvatura es *principal*, esto es, con respecto a estas dos líneas la superficie de la cáscara no tiene torsión.

Para una cúpula semiesférica, el radio de curvatura (de las dos curvaturas principales) es, por supuesto, el radio de la esfera. Para una cúpula de revolución más general (digamos, la parte superior de una cáscara de huevo) las curvaturas principales no tendrán el mismo valor numérico, pero los centros de curvatura desde los que parten los radios se situarán al mismo lado de la superficie de la cáscara. (Un observador bajo una cúpula de este tipo verá una superficie convexa en la dirección N-S y también en la dirección E-O.) Al aumentar la altura de la porción considerada de la cáscara de huevo, se alcanza un punto en el que la curvatura de la superficie en una dirección es cero, como en las agujas cónicas. Si se aumenta aún más la altura considerada, la curvatura pasa a ser negativa, como es el caso en la superficie (paraboloide-hiperbólica) de una torre de refrigeración; para un observador en el interior, una línea de curvatura principal sigue siendo convexa, mientras que la otra es ahora cóncava. Esto es, los centros de curvatura se encuentran a lados opuestos de la cáscara.

La *curvatura gaussiana* en un punto cualquiera de una superficie se define como el producto de los valores que toman las dos curvaturas principales en dicho punto. Para la cúpula de revolución, cuyos centros de curvatura se encuentran al mismo lado de la superficie, este producto es positivo. Para la aguja cónica, el producto es cero. Para la torre de refrigeración, una silla de montar, una cáscara de Candela o una bóveda de abanico, el producto es negativo.

Se ha mencionado que los coeficientes *A* y *C* en la ecuación (1) son esencialmente expresiones de la curvatura (*B* representa la torsión en la superficie). Si la curvatura gaussiana de la superficie es positiva, *A* y *C* tendrán el mismo signo —en términos matemáticos, la ecuación es elíptica. Por el contrario, si la curvatura gaussiana es negativa, *A* y *C* tendrán diferente

signo y la ecuación será hiperbólica. Existen importantes diferencias entre las soluciones de estos dos tipos de ecuaciones.

Para una cúpula (ecuación elíptica), las discontinuidades en las condiciones de contorno no se propagan lejos en la cáscara —una discontinuidad pequeña en la subestructura sobre la que se apoya una cúpula causará anomalías locales en las tensiones, pero la mayor parte de la estructura permanecerá inalterada. De manera similar, un aumento localizado de las cargas impuestas tendrá únicamente efectos locales —un hombre normal no es capaz de romper un huevo común de gallina entre los dedos índice y pulgar de una mano, cuando se ejerce la presión a lo largo del eje de revolución (una propiedad de los huevos claramente beneficiosa para la supervivencia de los animales ovíparos). Por el contrario, las ecuaciones hiperbólicas para la torre de refrigeración o la bóveda de abanico tiene *características* reales a través de las cuales se pueden propagar las discontinuidades, en teoría sin sufrir alteraciones. (Se expondrá un ejemplo sencillo en el comportamiento de la bóveda gótica cuatripartita.)

La cúpula

Las resultantes de tensiones de membrana para una cúpula semiesférica bajo la acción de su peso propio se indican en la figura 26.3. El dibujo muestra la cúpula cortada por la mitad y en él se puede ver que las fuerzas que actúan a lo largo del corte para mantener el equilibrio son de compresión hasta una distancia angular de unos 50º desde la clave (51,8º), pero se convierten drásticamente en tracciones al aproximarse a la base. Estas fuerzas se pueden calcular de manera inequívoca empleando la ecuación (1) —muy simplificada gracias a la simetría de la cáscara esférica— y no hay otra posible solución para la ecuación de equilibrio. Está claro que la figura 26.3 no puede representar el comportamiento de una cúpula (delgada) de fábrica, ya que se supone que ésta no puede soportar fuerzas de tracción. (Si la cúpula fuera incompleta y abarcara un ángulo de menos de unos 100º, la cúpula estaría entonces sometida confortablemente a fuerzas de compresión.)

Esta solución poco satisfactoria pero ineludible viene forzada por el precepto tiránico de la teoría de membrana que establece que la cáscara tiene un espesor infinitamente pequeño; no obstante, se pueden obtener mejores resultados si se considera la estructura real en vez del poco realista modelo matemático. La conclusión obtenida del estudio del arco de fábrica en dos dimensiones, figura 26.2, es que tiene que tener un espesor finito si ha de ser capaz de soportar su peso propio. De la misma manera, las fuerzas en una cúpula semiesférica de espesor finito dejan de estar obligadas a seguir la superficie esférica media, y se puede demostrar que una semiesfera de fábrica es estable si el cociente *R/t* tiene un valor algo menor de 25. Se ha mencionado ya que la cúpula interior de la catedral de San Pablo tiene un cociente *R/t* en torno a 50. Sin embargo, la cúpula nunca llega a ser vertical al aproximarse a la fábrica sobre la que se apoya. De hecho, la cúpula sigue el perfil de una parábola cúbica ($y = ax^3$). Ha llegado hasta nuestros días un estudio de Wren para una cúpula doble, anterior al proyecto final, figura 26.4, en la que los números muestran de forma concluyente que la curva dibujada para la cúpula inferior es la del conoide parabólico-cúbico de Hooke (Heyman 1998b).

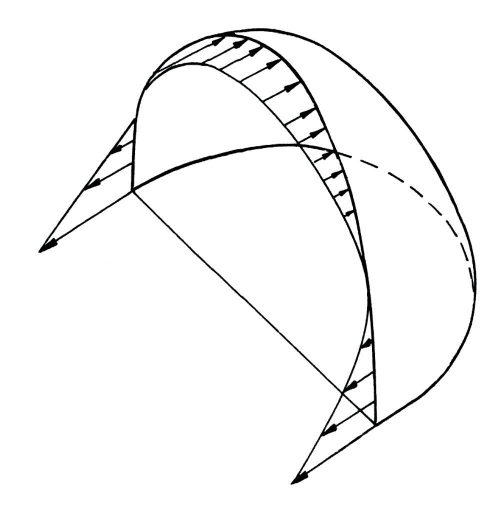


Figura 26.3
Tensiones de membrana actuando en (media) cúpula semiesférica

Las mayores cúpulas del Renacimiento (San Pedro de Roma, Santa Maria del Fiore de Florencia) —y ciertamente el Panteón de Roma— son cáscaras

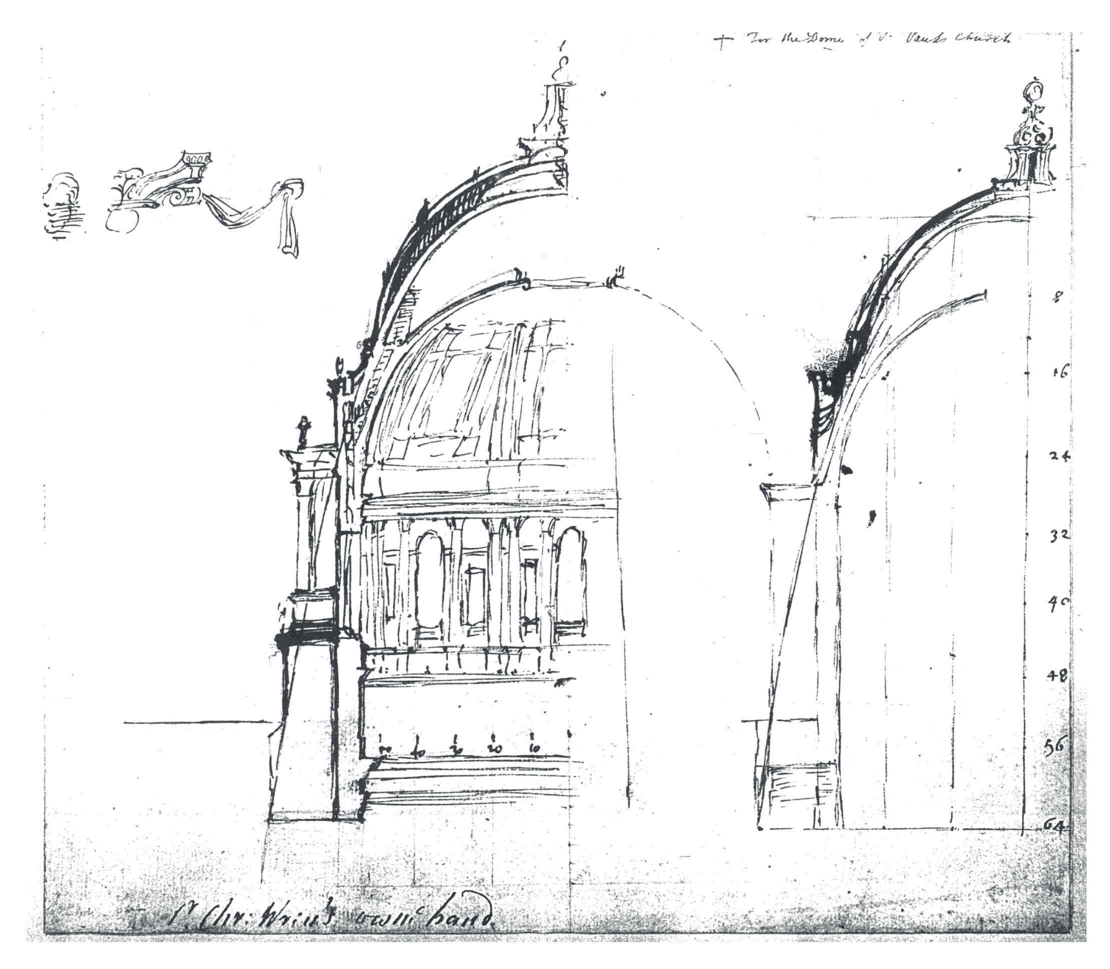


Figura 26.4
Dibujo de Wren (ca. 1690) para una cúpula, mostrando el perfil parabólico-cúbico

extremadamente gruesas (valores de *R/t* de diez o menos); en dos de los ejemplos italianos, el espesor incluye dos cáscaras con un espacio intermedio que permite el acceso. Por el contrario, la cúpula (interior) renacentista de Wren en San Pablo tiene, como hemos visto, un cociente *R/t* de cerca de 50, comparable a los altos valores obtenidos por Guastavino en sus proyectos de «bóvedas tabicadas». Estas bóvedas tabicadas se construyen en España desde hace unos 600 años, siendo, al parecer, el ejemplo más temprano hoy conservado, unas bóvedas en Valencia del año 1382, y esta técnica (de superposición de dos o más hojas de ladrillo) fue asimilada en los proyectos de Guastavino (Ochsendorf 2010).

La bóveda gótica

La figura 26.5 muestra la superficie idealizada de una bóveda cuatripartita tal como sería vista por un ingeniero al aplicar la teoría de la membrana. En la práctica, los paños de plementería que se extienden entre los nervios de la bóveda pueden ser ligeramente cupuliformes, pero según se muestran en la figura 26.5

son planos en una dirección y curvos en la dirección perpendicular; estas son, de hecho, las direcciones principales, y la curvatura gaussiana de esta plementería idealizada es cero. Ahora bien, los bordes de los paños de las bóvedas que cruzan de norte a sur (es decir, intersecando la dirección este/oeste de la nave principal de la iglesia) están habitualmente separados de los muros norte y sur por las llamadas grietas de Sabouret (Heyman 1995). Estos bordes de la plementería están, por lo tanto, completamente libres de cargas, y, puesto que no es posible la transmisión de fuerzas en la dirección plana del paño, las fuerzas debidas al peso propio están obligadas a seguir la dirección curva de la cáscara. Pol Abraham (1934) imaginó una pequeña bola sobre la plementería —su línea de descenso indica el «flujo» de las fuerzas por la plementería hasta los nervios diagonales (o las aristas en el Románico) y, a continuación, hasta los senos de las bóvedas y el sistema de contrarresto (arbotantes o, en el caso de que no haya naves laterales, directamente hasta los contrafuertes). Es necesario entonces sólo un pequeño paso para imaginar la plementería cortada en «rebanadas» como se muestra en la figura 26.6, sustituyendo la bóveda cuatripartita por una serie de arcos paralelos, con objeto de llevar a cabo un análisis sencillo (y realista).

Dicho método de los cortes ha sido fructífero para el estudio de la acción de la fábrica —por ejemplo, el análisis de los arcos de la figura 26.6 permite obtener fácilmente una estimación de las fuerzas que son necesarias en un arbotante para soportar una bóveda gótica. La técnica no se limita a cáscaras con curvatura gaussiana igual a cero; Poleni (1748) se basó en el hecho de que una serie de grietas habían dividido la cúpula de San Pedro de Roma en una serie de «gajos de naranja» (que se muestran esquemáticamente en la figura 26.7), y realizó un análisis brillante de la mecánica del arco casi bidimensional formado por dos gajos opuestos. (Prácticamente todas las grandes cúpulas presentan grietas meridionales similares —por ejemplo, el Panteón de Roma y Santa María de la Flor en Florencia. La única excepción parece ser la cúpula de San Pablo en Londres, donde la fábrica nunca llega a ser vertical, sino que sigue la forma del conoide parabólico-cúbico de Hooke.)

Es evidente que para una cúpula agrietada, figura 26.7, las tensiones (de compresión) pueden actuar únicamente a lo largo de los meridianos, y que las tensiones «anulares» han de ser cero. Esta observación práctica puede incorporarse matemáticamente a la ecuación de equilibrio (1), de tal forma que la función de tensión ϕ queda limitada. Pero, ahora se

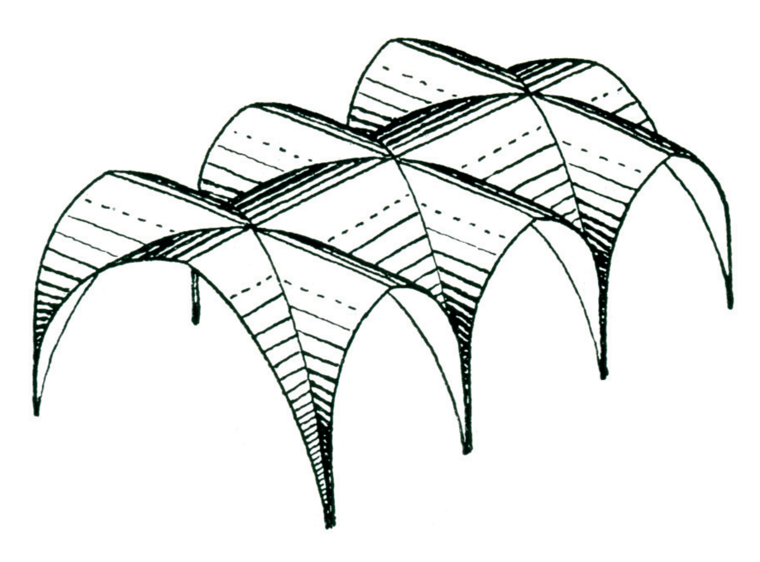


Figura 26.5
La bóveda cuatripartita gótica vista como una cáscara delgada

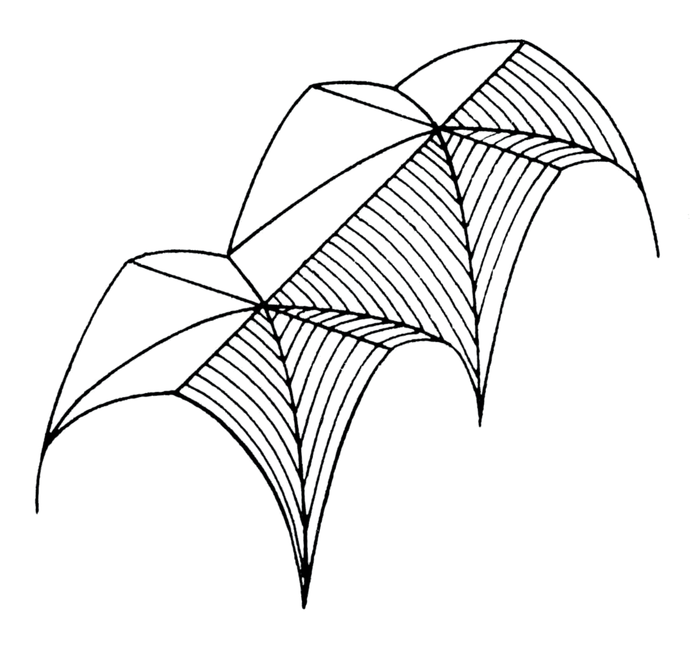


Figura 26.6
La bóveda cuatripartita dividida en arcos paralelos

puede resolver la ecuación inversamente para obtener expresiones para las curvaturas en función de los coeficientes *A*, *B* y *C*; esto es, es posible determinar la forma de la cúpula si ésta va a estar sometida únicamente a tensiones meridianas, siendo nulas las tensiones anulares. No es posible expresar la solución en términos de funciones matemáticas sencillas (Heyman 1998b), pero representa un perfil verdaderamente similar a la parábola cúbica de Hooke.

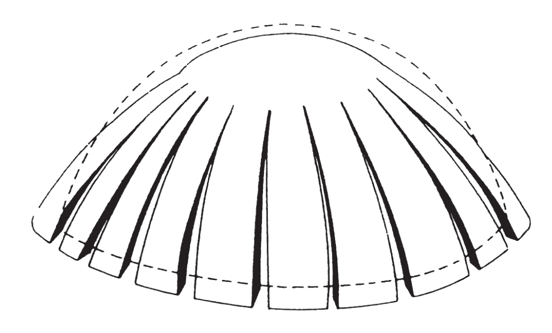


Figura 26.7
Agrietamiento exagerado e idealizado de una cúpula, como resultado de la apertura de la fábrica de soporte

Es igualmente posible analizar una cúpula con curvatura gaussiana negativa mediante el método de los cortes. La figura 26.8(a) muestra el dibujo de Mackenzie (1840) de una bóveda de abanico (invertida), dibujada para mostrar la enorme complejidad de la geometría de las dovelas que la componen. Se pueden ver una serie de líneas curvas superpuestas que representan cables o cadenas; si se hicieran cortes imaginarios entre estas líneas, se podría suponer que las cadenas soportan el peso de las dovelas de la bóveda invertida. Si ahora se invierte toda la bóveda, figura 26.8(b), las líneas curvas pasan a representar los caminos de las fuerzas de compresión que equilibran los pesos de las dovelas que forman la bóveda de abanico. Puesto que hay cortes entre las cadenas invertidas, éstas actúan de forma independiente —para la estructura real, se ha hallado una solución de equilibrio en la cual los esfuerzos anulares son cero. Por lo tanto, se puede desechar la parte izquierda de la figura 26.8(b), y la parte restante representa un posible modelo de una bóveda de abanico que arranca del muro de una iglesia.

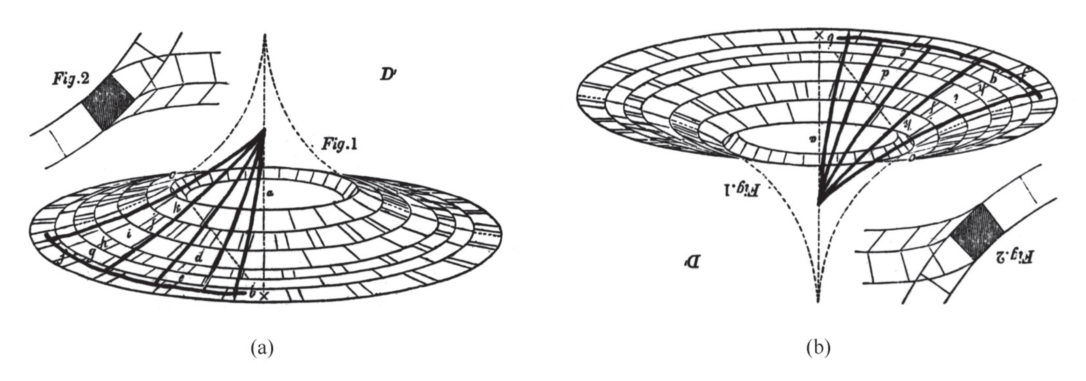


Figura 26.8.
(a) Dibujo de Mackenzie (1840) de la fábrica de una bóveda de abanico, con líneas añadidas que representan las cadenas que la soportan; (b) mismo dibujo, invertido

Los cálculos para cada una de las cadenas invertidas de la figura 26.8(b) son sencillos y ofrecen, por ejemplo, una buena aproximación del empuje ejercido por la bóveda sobre el muro. Pero se pueden extraer más conclusiones. Es evidente que las cadenas invertidas no siguen la sección de la bóveda al aproximarse a los arranques, y es imprescindible incluir un relleno de mampostería en el seno conoidal de la bóveda para permitir que el empuje de la bóveda escape hacia los estribos. (Este tipo de relleno es necesario también en la bóvedas nervadas cuatripartitas.)

Al igual que sucede con las cúpulas, es posible hallar perfiles de bóvedas de abanico directamente a partir de la ecuación de equilibrio (1). Las resultantes de las tensiones anulares pueden suponerse nulas, introduciendo así una condición en la función de tensiones ϕ, y se puede resolver la ecuación para obtener expresiones que describan las formas de una familia de bóvedas de abanico (Heyman 1995).

Las ecuaciones del análisis de membrana no hacen referencia a las propiedades del material, si bien generan un conjunto de fuerzas en la estructura de cáscara que equilibran las cargas impuestas. Se ha visto que la ecuación (1) contiene, en sus coeficientes *A*, *B* y *C*, expresiones analíticas de la forma geométrica de la cáscara (de espesor infinitamente pequeño), y sólamente son estrictamente aplicables a esa geometría. Las soluciones de la ecuación son, por tanto, sólamente válidas para una cáscara que tenga exactamente dicha forma, y pueden no ser aceptables para una estructura de fábrica que es incapaz de soportar esfuerzos de tracción. No obstante, se pueden obtener conclusiones relevantes si se relaja la limitación geométrica —en la práctica, una cáscara de espesor finito permitirá que los esfuerzos se desvíen de la superficie prescrita originalmente. Nótese que para cáscaras delgadas, con *R/t* igual o mayor a 50, dichas desviaciones serán mínimas; una cáscara cuyo espesor es proporcionalmente igual al doble del espesor de un huevo de gallina es geométricamente casi indistinguible de una cáscara de espesor cero. Esto implica, a su vez, que los valores de las resultantes de tensiones obtenidas mediante la ecuación (1) serán, en general, una buena aproximación a las fuerzas en la estructura real de espesor pequeño finito.

Una importante consecuencia del signo de la curvatura gaussiana afecta a la construcción de las bóvedas de fábrica. Por un lado, una bóveda con curvatura gaussiana positiva, una cúpula, se puede construir con una cimbra mínima —nadie creyó inicialmente a Brunelleschi cuando dijo que podía construir la cúpula de Santa Maria del Fiore sin necesidad de una compleja cimbra. Por el contrario, la fábrica de un arco (bidimensional) necesita estar totalmente apeada hasta la colocación de la clave. Dicho apeo también es necesario para cáscaras de curvatura gaussiana negativa; la fábrica de una bóveda de abanico ha de apoyarse sobre una cimbra hasta que alcanza su altura máxima, momento en el que sostiene y es sostenida por bóvedas colindantes; los tímpanos entre

abanicos, que pueden tener un óculo o una pesada clave, actúan como «claves» entre las bóvedas una vez terminadas. Hasta el momento de contar con este soporte, la ecuación de equilibrio (1) en su forma hiperbólica (para una superficie de curvatura gaussiana negativa), da soluciones que implican siempre algunas resultantes de tensiones de tracción. Por lo tanto, además de la complicada estereotomía que se requiere para cortar cada una de las piedras, los costes de construcción para las grandes bóvedas de abanico fueron muy elevados, y esta forma arquitectónica fue abandonada, para bóvedas de gran tamaño, en el siglo XVI.

27
Las cúpulas de Wren

Wren introdujo las cúpulas en Inglaterra y en sus proyectos se pueden distinguir tres características. En primer lugar las cúpulas de fábrica se podían emplear para cubrir espacios mucho mayores que lo que permitían las bóvedas románicas o góticas, y a Wren (junto con Hooke) le preocupaba encontrar la forma estructural correcta que debían tener estas cúpulas. Un ejemplo destacable de este tipo lo podemos encontrar en la catedral de San Pablo en Londres. En segundo lugar, a espacios más pequeños (pero aun relativamente grandes) se les puede dar aspecto de estar cubiertos por una cúpula aunque en realidad ésta no sea estructural sino que esté suspendida de una armadura de madera situada encima. Se pueden encontrar dos ejemplos entre las 51 iglesias parroquiales que fueron reconstruidas por Wren en Londres tras el Gran Incendio de 1666. Finalmente, en varias de estas iglesias la cúpula no tiene ninguna función estructural y se emplea como un elemento decorativo.

Breve cronología

1625	Ascensión al trono de Charles I
1632	Nacimiento de Christopher Wren
1649	Commonwealth
1651	Christopher Wren se gradúa en Oxford
1657	Christopher Wren es nombrado profesor de Astronomía en el Gresham College, Londres
1660	Restauración. Ascensión al trono de Charles II
1661	Se funda la Royal Society
	Cristopher Wren es nombrado profesor *Savilian* de astronomía, Oxford
1664	Teatro Sheldonian, Oxford
	Capilla del Pembroke College, Cambridge
1665	Año de la Gran Peste
	Christopher Wren visita París
1666	Propuestas de Wren para la antigua catedral de San Pablo
	Gran Incendio de Londres
1672-73	Gran Modelo del segundo proyecto para la nueva catedral
1675	Proyecto Warrant para la nueva catedral
1685	Ascensión al trono de James II

La catedral de Ely

Al visitante de Ely le puede resultar difícil, en un primer momento, entender el amplio espacio que se abre en el centro de la catedral. Este espacio es, de hecho, único en la arquitectura románica y gótica inglesa; en el resto de iglesias de estos periodos los cuatro pilares del crucero limitan su extensión al ancho que tienen la nave, el presbiterio y los brazos del

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Wren's domes». *Proceedings of the First Construction History Society Conference, Queen's College, University of Cambridge, 11-12th April 2014*, ed. por J. W. P. Campbell et al. (Cambridge: Construction History Society, 2014): 209–218 Traducción de José Antonio García Ares.

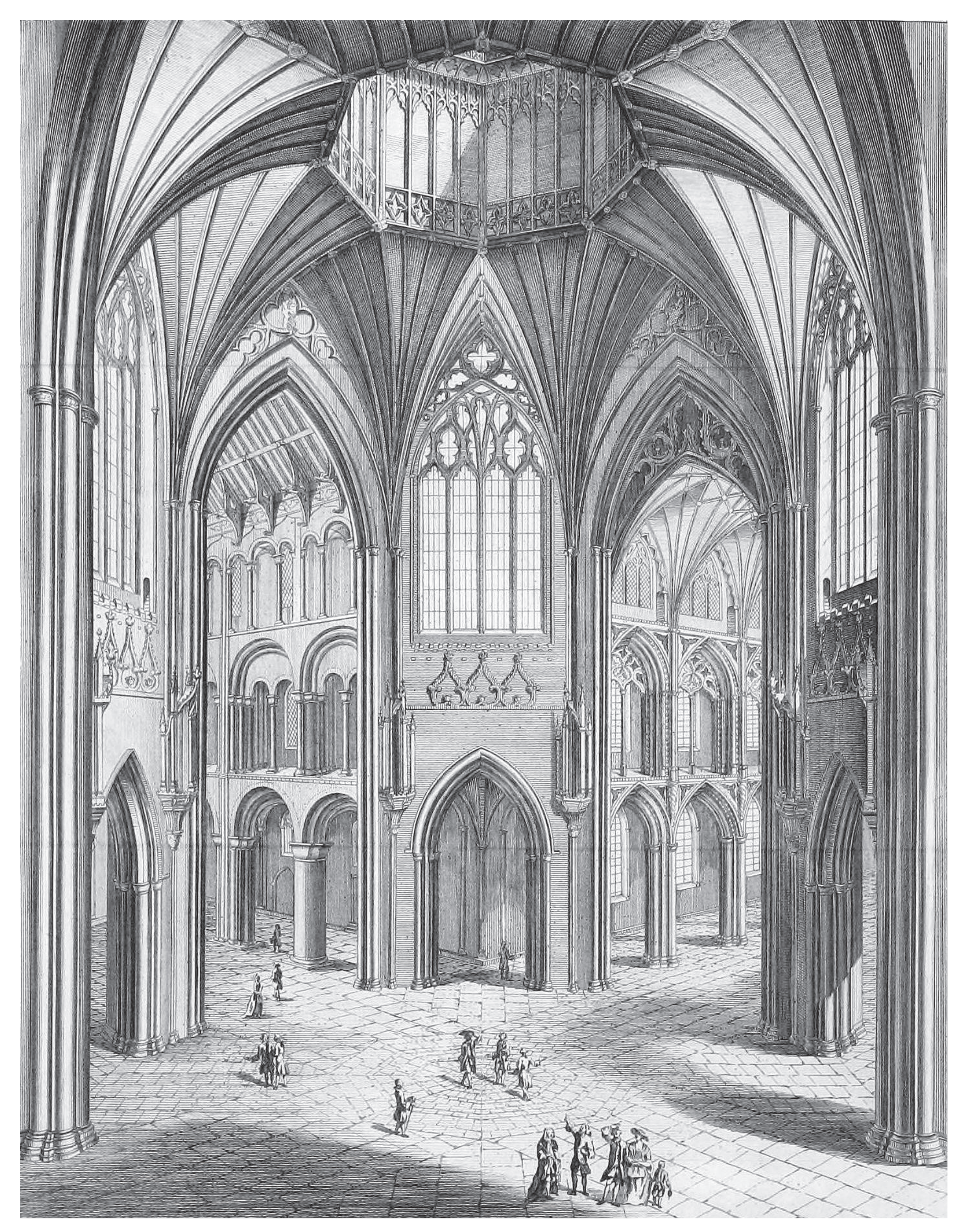


Figura 27.1
Crucero de la Catedral de Ely (Bentham 1771)

transepto —en Inglaterra, se trata normalmente de un cuadrado de unos 12 m de lado (cf. 15 m en las catedrales de la Isla de Francia). Situado en cruceros tan estrechos, el visitante verá sobre él la bóveda, de madera o piedra, que indica el nivel del primer cuerpo de la torre sobre el crucero. En Ely, sin embargo, la bóveda cubre no solo el ancho de la nave y el transepto sino también el ancho de las naves laterales; este espacio mide, no 12 m, sino 24 m. La figura 27.1 muestra el grabado de Bentham de 1771 en el que se puede observar el arranque del cimborrio de madera sobre la bóveda.[1]

Esta configuración es el resultado de una reforma realizada en el siglo XIV sobre el proyecto original normando. La nueva iglesia se comenzó en 1071, poco después de la conquista; la catedral románica se finalizó un siglo después, y contaba con una torre (cuadrada de 12 m) sobre el crucero. Tras dos siglos en pie la torre colapsó el 12 de febrero de 1322; es posible que nunca se conozcan las causas exactas, pero es probable que se debiera a un fallo geotécnico de la cimentación. Los cuatro tramos de la bóveda original del presbiterio normando se destruyeron como resultado del hundimiento de la torre o fueron demolidos para posteriormente ser reconstruidos en estilo gótico en el decenio de 1320, tras el colapso. En este mismo periodo se llevó a cabo una ingeniosa reconstrucción de la zona del crucero.

El nuevo proyecto se asocia al nombre de Alan de Walsingham, que por entonces era el Sacristán (y posteriormente Prior) de la catedral, pero está claro que se buscó consejo por parte de expertos.[2] El proyecto del cimborrio octogonal de madera se debe a William Hurley, carpintero del Rey, pero un carpintero local, Geoffrey de Middleton, llevó a cabo la obra. En cualquier caso, podría haber sido Walsingham quien tuvo la idea de suprimir los pilares originales del crucero; la figura 27.2 muestra a la izquierda la configuración antes del hundimiento, y a la derecha la posición actual de los pilares del crucero. El cuadrado de 12 m se ha ampliado hasta formar un octógono el doble de grande. (Los ocho pilares normandos se regruesaron revistiéndolos con nueva sillería y su cimentación se amplió.)

Cabe señalar que el nuevo octógono no es equilátero; cuatro de sus lados tienen 12 m y los otros cuatro 8,5 m aproximadamente. Los ocho pilares soportan arcos de piedra sobre los que apoya el tambor octogonal de fábrica que constituye la «torre del crucero» en la actualidad. La bóveda, por el contrario, es de madera (figura 27.1) al igual que lo son los nervios que nacen de los mismos capiteles que los arcos de piedra. Estos capiteles se encuentran a unos 19 m por encima del suelo y la bóveda se eleva hasta formar un anillo octogonal en la base del cimborrio, a unos 29 m de altura. Este octógono es regular y tiene unos 12 m de «diámetro». La transición desde la base irregular inferior se logra gracias a la ingeniosa geometría de la construcción.

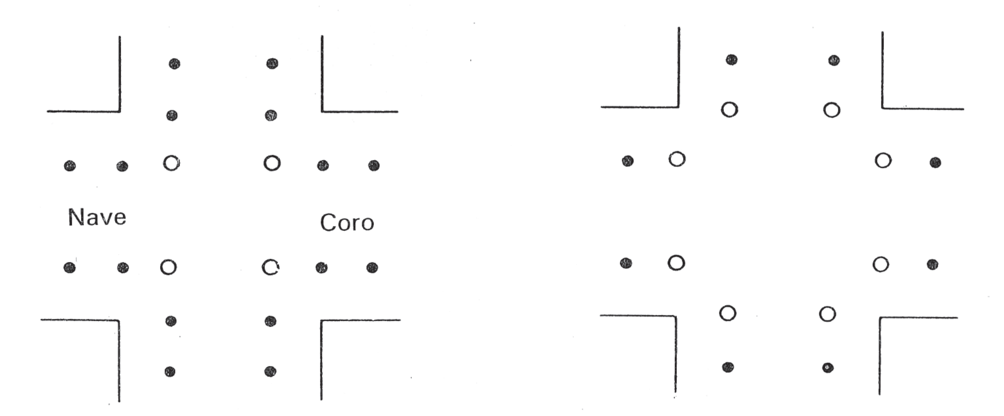


Figura 27.2
Planta del crucero de la catedral de Ely. Izquierda, antes de 1322; derecha, tras la reconstrucción.

Matthew Wren y su sobrino Cristopher

Matthew Wren fue nombrado obispo de Ely en 1638 y ejercía este puesto cuando murió en 1667; de 1642 a 1660 estuvo encarcelado en la torre de Londres. Se había graduado en Pembroke Hall, Cambridge (Pembroke College) en 1605, y ocupó diversos cargos de naturaleza eclesiástica en las universidades de Oxford y Cambridge, incluyendo el de Master de Peterhouse en Cambridge. Ejerció este cargo de 1625 a 1634, periodo durante el cual se construyó la capilla del College, consagrándose en 1632. Conocía a la familia real ya que había sido Deán de Windsor en 1628 y Capellán del príncipe Charles (Charles I) en 1622.

Christopher, sobrino de Matthew, se graduó en Wadham College, Oxford, en 1653 y fue nombrado, con 25 años, profesor de astronomía en el Gresham College de Londres; cuatro años más tarde volvió a Oxford como profesor *Savilian* de astronomía. Mantuvo su interés por la ciencia durante toda su vida y fue uno de los miembros fundadores de la Royal Society, de la que fue presidente de 1680 a 1682.

Fue en una reunión de la Royal Society en la que presentó su proyecto para el teatro Sheldonian en Oxford. Se cree que éste fue su primer encargo de naturaleza arquitectónica y es probable que en un primer momento se le consultara sobre el proyecto de la techumbre de madera que requería salvar una luz de más de 21 m. Wren ideó un sistema de armaduras trianguladas, con una forma no muy alejada de las empleadas en las grandes iglesias medievales. Estas últimas armaduras, sin embargo, salvan una luz «estándar» de 12 m; el cordón inferior de 21 m de la cercha de Wren está formado por maderos más cortos ensamblados de modo ingenioso por medio de juntas en rayo de júpiter. La construcción comenzó en 1664, pero un año después la Universidad de Oxford cerró por la peste. Antes de esto, sin embargo, Matthew Wren encargó a Christopher el proyecto de una capilla para su antiguo College, Pembroke (Matthew está enterrado en la cripta de la capilla).

En realidad, como Grimstone ha mostrado,[3] ya existía un proyecto preliminar para la capilla realizado por el «arquitecto» Edward Pearce. Pearce era un maestro de obras «medieval», de los que llevaba a cabo contratos de proyecto y construcción, a menudo empleando piedra de canteras de su propiedad. Este tipo de maestros poseía un profundo conocimiento tanto del arte como de la práctica de su oficio y su buen hacer en la realización de importantes encargos se les podía reconocer otorgándoles el título de caballero. Sin embargo el obispo Matthew, como mecenas y antiguo Fellow de Pembroke, impuso a un arquitecto joven e inexperto para el proyecto de la capilla.

De hecho, los tiempos de maestros como Pearce estaban a punto de pasar, y sería por un accidente. Dos años más tarde la destrucción que provocó el Gran Incendio de Londres y el consiguiente volumen de trabajo que la reconstrucción requirió fueron tales que los maestros de obra medievales no pudieron dar abasto. Wren, que no había pasado por las exigentes pruebas para alcanzar los grados de aprendiz, oficial y maestro, emergió como el primer arquitecto «moderno», con preparación para proyectar pero sin la experiencia para acometer la ejecución material de grandes obras. Los maestros medievales, con sus cuadrillas de artesanos, se dieron por satisfechos con ser contratados como constructores en la campaña de reconstrucción tras el incendio y, ciertamente, Wren empleó a Pearce como uno de sus (varios) contratistas en la construcción de la catedral de San Pablo. Pearce, evidentemente, asumió contento un papel similar en Pembroke en 1664. (Podría ser más exacto afirmar que no fue Wren sino su discípulo Hawksmoor el primer arquitecto inglés, entendiendo como tal a alguien formado dentro de un estudio de arquitectura en ejercicio.[4])

En el tratamiento arquitectónico tanto del teatro Sheldonian como en la capilla del Pembroke College se pueden observar algunos aspectos estilísticamente desafortunados como podría esperarse en las primeras obras de un joven arquitecto inexperto. Wren había estudiado, por supuesto, los libros de los maestros italianos —Palladio, Alberti y Serlio— y sus obras posteriores muestran como fue asimilando este conocimiento en sus proyectos.

Las cúpulas de Wren

Tanto Palladio como Serlio contienen extensas descripciones de la cúpula del Panteón, *La Ritonda*. Wren en 1665, antes de visitar París por buena parte del año, nunca había visto una cúpula —no había ninguna en Inglaterra. Llevando cartas de presentación

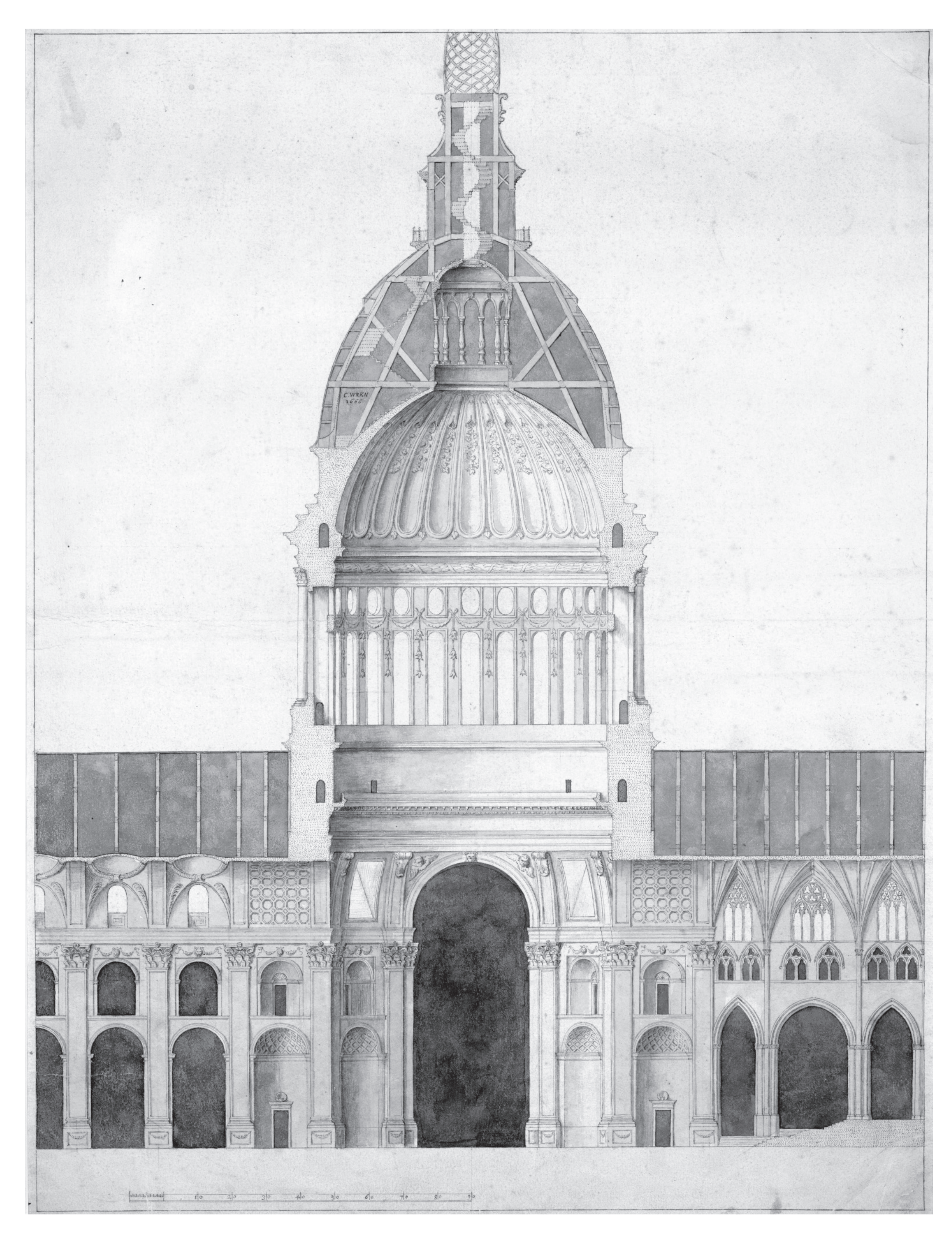


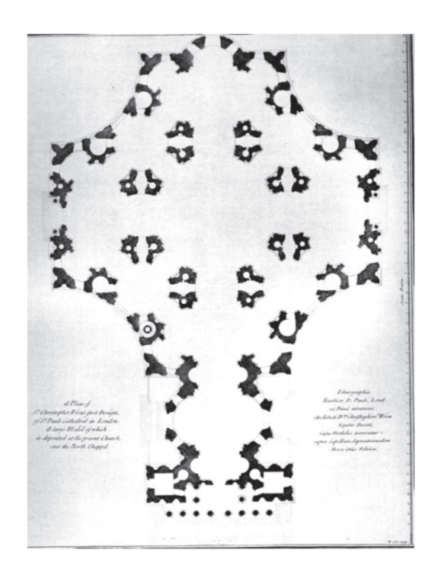
Figura 27.3
Propuesta de Wren para una cúpula en la antigua catedral de San Pablo (Campbell 2008)

de la Royal Society pudo conocer en París a arquitectos eminentes (como Bernini), y ver cúpulas que se habían acabado recientemente y otras en construcción (La de la Sorbona de Lemercier o la de Val-de-Grâce de Mansart). Las cúpulas del siglo XVII debían mucho a la de San Pedro en Roma, tanto al concepto original de Bramante (ilustrado en Serlio) como al proyecto final de Miguel Ángel que ejecutó Giacomo della Porta; por tanto, las formas de las cúpulas que Wren vio en París no le fueron extrañas. Regresó a Inglaterra a principios de 1666 y se le presentó de inmediato la oportunidad de proyectar su primera cúpula.

La antigua catedral de San Pablo no se encontraba en buen estado, y en 1663 se formó una Comisión Real para determinar que acciones se debían tomar. A pesar de su inexperiencia —las obras de la capilla de Pembroke y el teatro Sheldonian no habían hecho más que empezar— Wren fue requerido por la comisión para emitir un informe a la Comisión. Así lo hizo, realizando un análisis exhaustivo del estado de la fábrica. Los trabajos de la Comisión languidecían, pero en la primavera de 1666 la peste había remitido y Wren realizó otro estudio y emitió el consiguiente informe para los miembros de la Comisión. Todos estuvieron de acuerdo en que la zona del crucero estaba en muy mal estado; en palabras de Wren (*Parentalia 1750*):

> ... la torre desde lo alto hasta la base, y la parte adyacente, presenta tal cantidad de deformaciones que ningún arquitecto juicioso pensaría que puede repararse. Aun asumiendo el gran coste de dotarla de un nuevo revestimiento se mantendría indigna del resto de la fábrica, frágil e insegura. Por estas razones, como he expuesto, se decidió formalmente su demolición.
>
> No puedo proponer una solución mejor que achaflanar las esquinas interiores del crucero para convertir esta parte central en un espacioso domo o rotonda, con una cúpula o cubierta semiesférica, y sobre la cúpula (para el ornamento exterior) una linterna con un remate en aguja...[5]

El «achaflanar las esquinas interiores» se ilustra con exactitud en la figura 27.2 —Wren estaba creando un espacio al modo de Ely en el centro de la antigua catedral de San Pablo. La sección transversal de su proyecto se muestra en la figura 27.3; el tambor cilíndrico soporta una cúpula de fábrica sobre la que se eleva el cupulino. Exteriormente el conjunto se cubre con una cúpula de madera revestida de plomo. El 27 de agosto de 1666 se decidió recomendar el proyecto de Wren a los miembros de la Comisión —el 2 de septiembre el



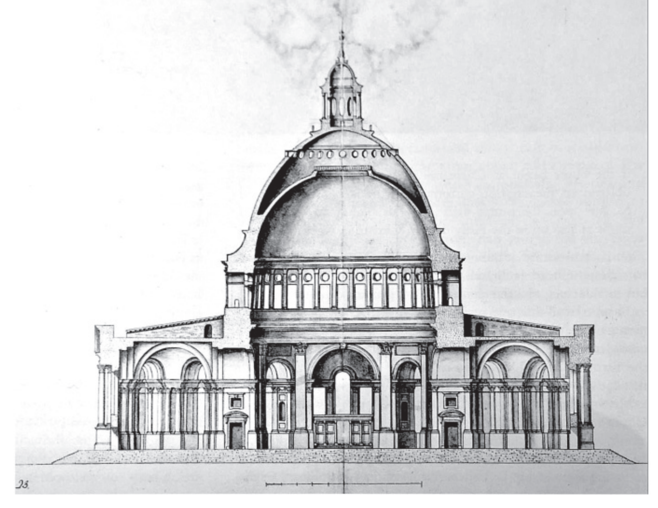


Figura 27.4
El proyecto en cruz griega, planta y sección

Gran Incendio destrozó gran parte de la City de Londres, y dañó de modo irremediable la antigua catedral de San Pablo. Sería este incendio el que convertiría a Wren en el más grande arquitecto inglés.

La catedral de San Pablo

Curiosamente, el primer proyecto de Wren para la nueva catedral de San Pablo fue el de una iglesia de dimensiones modestas y sin cúpula. Se realizó un modelo pero el proyecto fue pronto rechazado, en parte debido a no ser suficientemente imponente para la catedral de una gran ciudad. Unos cinco años más tarde, en 1672, Wren había finalizado el proyecto para un edificio mucho más noble, con planta de cruz griega y coronado por una gran cúpula, figura 27.4. Charles II aprobó el proyecto y mandó que se realizara un modelo; este Gran Modelo, «Great Model», se conserva en la actual catedral, tiene una escala de 1 pulgada a 2 pies, y costó la enorme suma de más de 500 libras.

Además de las innovaciones «arquitectónicas» de este proyecto, hay una diferencia técnica significativa entre el proyecto de la cúpula de Wren y las cúpulas renacentistas que había visto en ilustraciones o en Francia. Mientras la sección de estas cúpulas se hace vertical al llegar a los apoyos, la cúpula de la figura

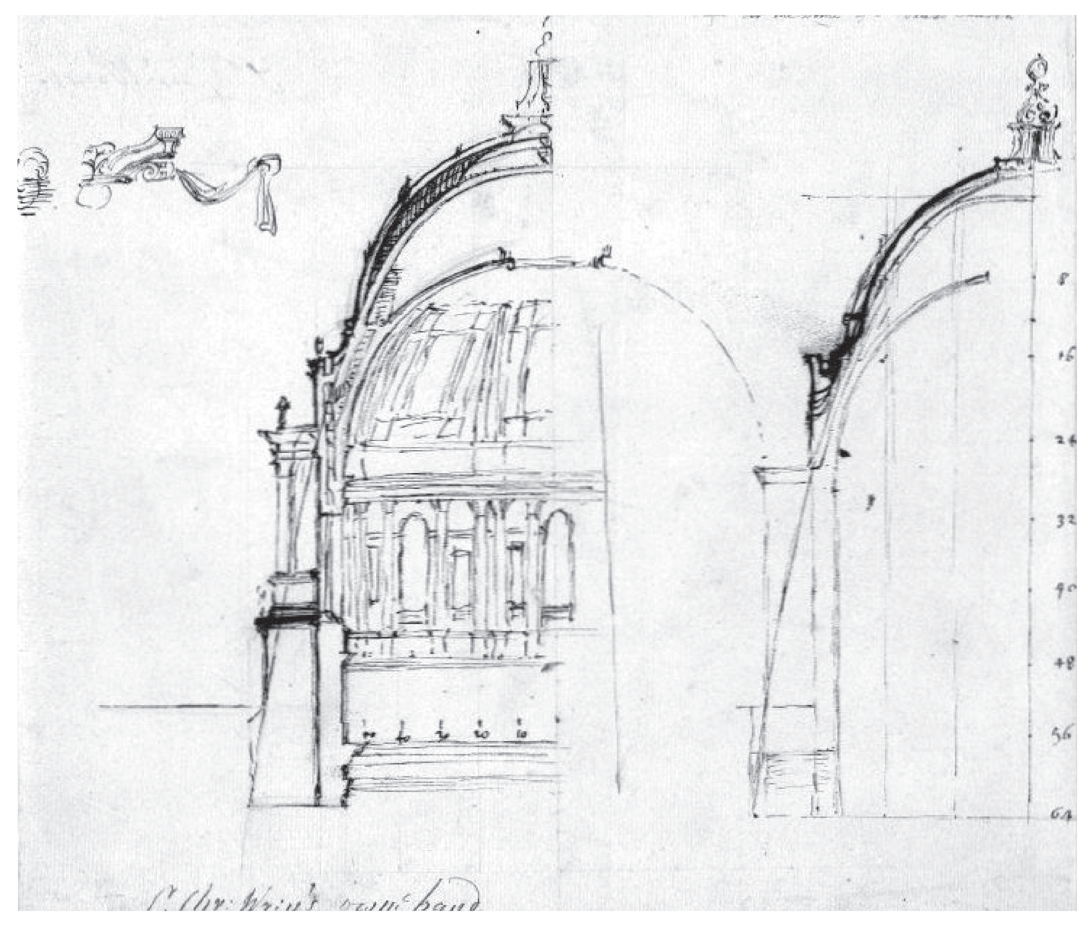


Figura 27.5
Dibujo de Wren de la parábola cúbica (Higgott 2009)

27.4 se sigue abriendo en su base. Robert Hooke había afirmado que la forma perfecta para un arco (bidimensional, de fábrica) era la de una catenaria invertida —una cadena siempre presenta una inclinación en sus puntos de apoyo. En 1671 (justo antes del Gran Modelo) Hooke había expuesto que la forma ideal para una cúpula era la de un conoide parabólico-cúbico, esto es, la superficie que se genera al girar la curva $y = ax^3$ en torno al eje y.[6] Uno de los dibujos de Wren (figura 27.5), probablemente realizado también en 1671, muestra un estudio para esta cúpula con unos números que indican claramente la parábola cúbica;[7] el perfil de la cúpula no se hace vertical al descender hacia los apoyos.

Aunque había recibido la aprobación del rey, el proyecto en cruz griega no se había consensuado con el Deán y el Cabildo de la catedral, que mostraron una fuerte oposición a la ausencia de una cabecera para el coro al modo tradicional, y exigían un proyecto con el altar dispuesto en el Este —como era habitual— y no la innovación del culto en torno a un altar central. De este modo se llegó a una tercera fase en el proyecto de la catedral actual, y el conocido como «Warrant Design» fue finalmente aprobado por cédula real en 1675, aunque con unas disposiciones que permitían a Wren introducir cambios en los detalles. (Es quizá irónico que el Deán y Cabildo, al cabo de trescientos años, hayan reorganizado recientemente la catedral disponiendo el altar mayor en el crucero bajo la cúpula.)

De entre los muchos cambios que Wren introdujo a lo largo de los treinta años que duró la construcción, algunos de los más significativos se hicieron en la cúpula. El proyecto final, terminado en 1705, se muestra en la figura 27.6. Tiene una cúpula interior con óculo construida con dos hojas de ladrillo y un espesor total de 460 mm;[8] esta es la cúpula que se ve desde el interior y la que define el espacio central de la catedral que tiene unos 34 m de diámetro. Por encima se sitúa un cono, también de ladrillo pero con algunas hiladas de piedra, que soporta las 700 toneladas de la linterna y el remate de bola y cruz. El conjunto se cubre con una construcción de madera con la superficie exterior revestida de plomo; esta es la cúpula que se ve desde el exterior.

Se ha estimado que el peso total de la fábrica por encima de la cota de los arcos torales de la figura 27.6, está por encima de las 20.000 toneladas; esto es, probablemente el doble del peso de la torre del crucero que tenía la antigua catedral.

Se puede apreciar en la figura 27.4 que la cúpula del proyecto en cruz griega se iba a soportar sobre ocho pares de pilares dispuestos en forma de octógono regular. El proyecto que se ejecutó finalmente presenta unos apoyos similares, pero el octógono no es regular, y se asemeja al tipo ilustrado en la figura 27.2; el proyecto ha sido criticado en ocasiones por este hecho.

Mecánica de las cúpulas de fábrica

El conoide parabólico-cúbico de Hooke era en realidad una aproximación racional a la forma «perfecta» de una cúpula de fábrica. Se puede demostrar, haciendo algunas suposiciones, que la verdadera curva de la sección ideal es matemáticamente muchísimo más compleja, pero, de hecho, se parece extraordinariamente a la parábola cúbica.[9] En cualquier caso, una anotación de 1675, que Robert Hooke realizó en su diario, señala de modo explícito que Wren basó el proyecto de la cúpula de San Pablo en su «principio» (de Hooke). La forma exacta es irrelevante; el aspecto clave del proyecto, que entendieron Hooke y Wren, era que la sección de la cúpula debía seguir la «línea de empujes», esto es, la forma (tridimensional equivalente) de la catenaria invertida que se rige por las ecuaciones de la estática. La fábrica nunca desciende de modo vertical.

(Más recientemente el arquitecto español Gaudí también entendió plenamente el concepto de no verticalidad sugerido por sus complejos modelos catenarios. El proyecto de la Sagrada Familia en Barcelona, por ejemplo, parece emplear de modo convencional los pilares para soportar las bóvedas de la nave central, sin embargo estos pilares se inclinan hacia dentro a medida que ascienden desde el suelo.)

Las iglesias parroquiales de Wren

La reconstrucción tras el incendio de las iglesias parroquiales de Londres permitió a Wren producir una gran variedad de proyectos, y en particular parece que se deleitaba en el proyecto de imaginativas agujas. En ocasiones se situaban directamente sobre torres y otras veces, como en la iglesia de St. Peter's Cornhill, servían como remate de cúpulas. De hecho aparecen cúpulas en muchas de las iglesias proyectadas por el estudio de Wren; las iglesias se atribuyen

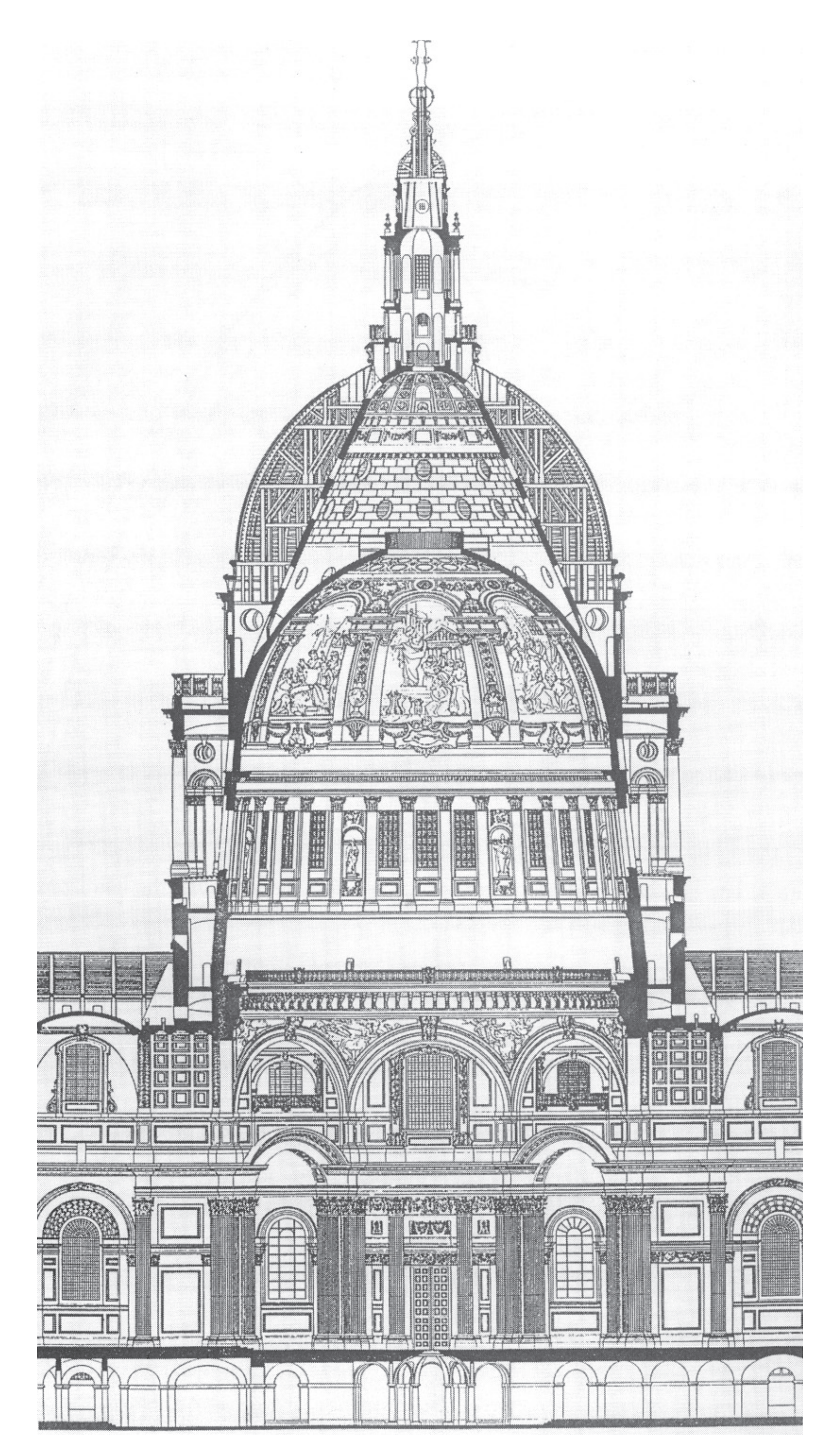


Figura 27.6
Catedral de San Pablo, sección

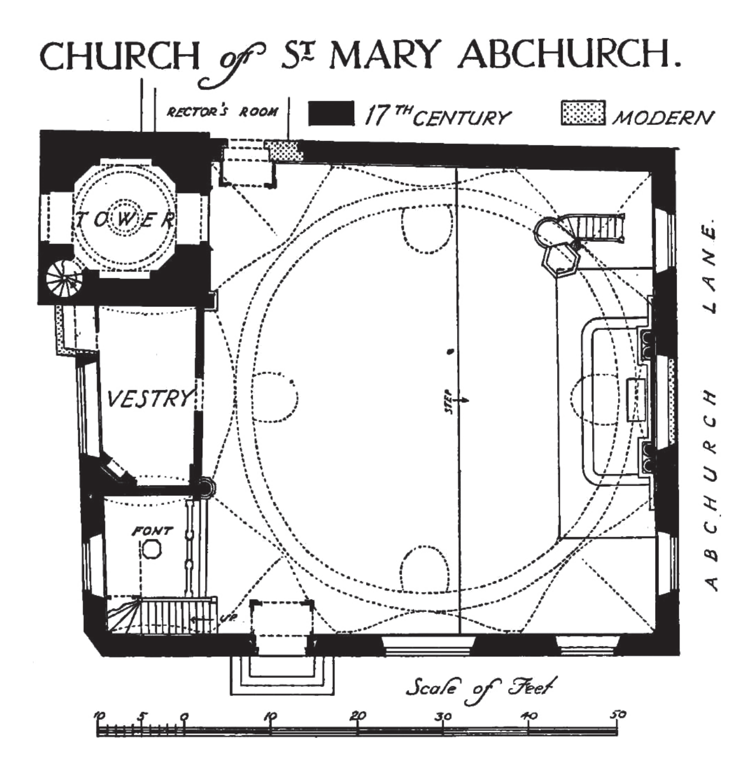


Figura 27.7
St. Mary Abchurch, planta

normalmente al propio Wren pero St. Edmund the King, por ejemplo, fue proyectada por Robert Hooke (al igual que el «Monument»), y Hawksmoor progresivamente desempeñó un papel relevante en los proyectos producidos por «Wren, Hooke and Partners».[10] St. Edmund the King tienen un vestíbulo con una cúpula y Wren añadió vestíbulos similares en el extremo occidental de la iglesia de St. Clement Danes en Strand, Londres.

Sin embargo, hay dos cúpulas, de mayor tamaño (una tercera, la de St. Mary-at-Hill, fue destruida casi en su totalidad por un incendio en 1988, y ha sido reconstruida). La mayor de ellas es la de St. Mary Abchurch que está contenida en un rectángulo ligeramente irregular (figura 27.7) y tiene una luz de unos 19 m. Esta cúpula no es estructural y está construida como una bóveda encamonada y suspendida de un «estructura espacial» compuesta de maderos verticales y horizontales, que, a su vez, está cubierta con un tejado de madera a cuatro aguas.

La cúpula de St. Stephen Walbrook es más espectacular aunque solo tiene 14 m de diámetro; abarca el ancho de la nave central y las laterales configurando así en el extremo occidental un espacio tipo «Ely» (figura 27.8). Esta cúpula también es encamonada y su forma se manifiesta al exterior en forma de una cúpula que cubre la «estructura espacial».

Envoi

Se pueden distinguir tres características diferentes en el uso que Wren hace de las cúpulas. La primera es la estructural. Wren y Hooke comprendían con claridad que la forma de una cúpula de fábrica debería regirse por las reglas de la «mecánica» (y, por tanto, de la geometría). Las dos cúpulas interiores de la catedral de San Pablo siguen este principio. La tercera cúpula que configura la silueta exterior es de madera reves-

Figura 27.8
St. Stephen Walbrook, planta.

tida de plomo y representa la expresión «arquitectónica» del proyecto.

La segunda característica es sin duda la «arquitectónica», en la que se considera la cúpula capaz de cubrir espacios mucho más amplios de lo que era posible mediante el empleo de bóvedas románicas o góticas, o mediante el empleo de armaduras de cubierta. De este modo se puede dar a una iglesia una apariencia completamente diferente, como ocurre en la catedral de Ely, en St. Stephen Walbrook y en San Pablo. Las cúpulas de St. Stephen Walbrook y St. Mary Abchurch son encamonadas y sin ningún carácter estructural. Tienen la naturaleza del decorado escenográfico que se emplea para representar algo real, y pueden encontrarse precedentes de esto en la arquitectura renacentista. Nada impidió al escenógrafo Iñigo Jones, por ejemplo, convertirse en un destacado arquitecto renacentista.

Finalmente, Wren empleó cúpulas de un modo casi postmoderno, añadiéndolas a sus proyectos como elementos decorativos sin ninguna otra función.

Notas

El texto entre corchetes hace referencia a capítulos de alguno de los dos volúmenes de Estructuras de fábrica *o a traducciones de libros contenidos en la presente colección de «Textos sobre teoría e historia de las construcciones».*

Capítulo 1

AGRADECIMIENTOS: El autor desea mostrar su agradecimiento al Sr. Ian Curry, arquitecto de la catedral de Durham, por las copias de dibujos y la detallada información proporcionada.

Capítulo 2

J. Basire y J. Carter. 1807. *Plans, Elevations Sections and Specimens of the Architecture of the Cathedral Church of Gloucester* (Londres: Society of Antiquaries).

F. Bond. 1900. *The cathedrals of England and Wales,* 4ª ed. (Londres: Batsford, 1912).

J. Britton. 1836. *The history and antiquities of the Abbey and Cathedral Church of Gloucester* (Londres: Nattali).

H. J. L. J. Masse. 1908. *The cathedral church of Gloucester* (Londres: Bell's Cathedral).

D. Welander. 1991. *The history, art and architecture of Gloucester Cathedral* (Stroud: Alan Sutton).

Capítulo 3

S. P. Timoshenko. 1934. *Theory of elasticity* (Nueva York: McGraw-Hill).

Capítulo 4

1. J. Heyman. 1973. «Plastic design and limit state design,» *Structural Engineer* 51: 127–31.
2. J. Heyman. 1996. *Elements of the theory of structures* (Cambridge: Cambridge University Press).
3. SSRC. 1931/1934/1936. *Steel Structures Research Committee. First Report/Second Report/Final Report* (Londres: HMSO).
4. J. F. Baker. 1954. *The Steel Skeleton. Vol. 1: Elastic behaviour and design* (Cambridge: Cambridge University Press).
5. J. F. Baker, M. R. Horne y J. Heyman. 1956. *The Steel Skeleton. Vol. 2: Plastic behaviour and design* (Cambridge: Cambridge University Press).
6. J. F. Baker y J. Heyman. 1969. *Plastic design of frames. Vol. 1: Fundamentals* (Cambridge: Cambridge University Press).
7. J. Heyman. 1971. *Plastic design of frames. Vol. 2: Applications* (Cambridge: Cambridge University Press).
8. Joint Committee of the Welding Institute and the Institution of Structural Engineers. 1964/1968/1971. *Fully-rigid multi-storey welded steel frames.Report/ Supplement/Second Report* (Londres: Institution of Structural Engineers).

Capítulo 5

1. J. Heyman. 1991. «Hemingbrough Spire». En: *Structural Repair and Mantenance of Historical Buildings II. Vol. 1: General Studies, Materials and Analysis,* C. A. Brebbia et al. eds. (Southampton: Computational Mechanics Publications): 12–22. [Vol. 1 (cap. 25): 329–335.]
2. S. P. Timoshenko. 1928. *Vibration problems in engineering* (Nueva York: VanNostrand). 2ª ed. 1937; 3ª ed. 1955; y sucesivas reimpresiones.

Capítulo 6

1. «True... form of all manner of arches for building». R. Hooke. 1675. *A description of helioscopes, and some other instruments* (Londres: J. Martyn).
2. «Mr Hooke brought in this problem of architecture: The basis of the distance of two pillars nd the altitude of an arch being given, to find out the right figure for that arch, for the firm sustaining, upon the whole, or any part of it, any weight given; as also to find out the butments of that arch. Mr Hooke being asked, whether he had the demonstration of this useful poblem, he said he had it, and would show it to the President».
3. R. T. Gunther. 1930. *Early Science in Oxford. Vols. 6, 7: The life and work of Robert Hooke (Part I; Part II)* (Oxford: Oxford University Press).
4. Th. Birch. 1756–57. *The history of the Royal Society of London*, 4 vols. (Londres: Millar).
5. «Mr Hooke represented the mechanical way of making an arch of such a figure, as shall sustain any weight given. Being asked, whether he had ready the demonstration of it, he answered, that he had given it to the President, who was absent from this meeting».
6. «The demonstration of Mr Hooke concerning the line of an arch for supporting any weight assigned, being called for, Mr Oldenburg mentioned, that Dr Wren had also a demonstration of it. It was desired, that these demonstrations might be both delivered and opened together by the President».
7. «Dr Wren delivered to the President his demonstration of what line it is, which an arch, fit to sustain any assigned weight, makes. The President was desired to examine it, and to give an account of it to the Society. Mr Hooke, being called upon for his demonstration of the same subject answered, that he had already declared the substance of it to the President, who yet desired him to give it also in writing, that so it might be with more leisure and conveniency examined».
8. H. W. Robinson y W. Adams. 1935. *The diary of Robert Hooke 1672–1680* (Londres: Taylor and Francis).
9. R. Waller 1705. *The posthumous works of Robert Hooke* (Londres: S. Smith and B. Walford). (Segunda edición: reproducción fotográfica con una introducción de T. M. Brown. Londres: Frank Cass and Co., 1971.)
10. «the true Mathematical and Mechanichal form of all manner of Arches for Building, with the true butment necessary to each of them».
11. C. Truesdell. 1960. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788*, Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, 2nd Series, 11.2 (Zürich: Orell Füssli).
12. Bonaventura Cavalieri. 1635. *Geometria indivisibilibus* (Bologna: Ferronius).
13. «Mr Hooke produced the representation of the figure of the arch of a cupola for the sustaining such and such determinate weights, and found it to be a cubico-parabolical conoid; adding, that by this figure might be determined all the difficulties in architecture about arches and butments. He was desired to bring in the demonstration and description of it in writing to be registered».
14. R. S. Westfall. 1980. *Never at rest: a biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).
15. J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica.* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]
16. J. Heyman. 1996. *Elements of the theory of structures* (Cambridge: Cambridge University Press).
17. J. Heyman. 1988. «Poleni's problem,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers,* Part 1, 84: 737–759. [Vol. 1 (cap. 23): 303–322.]

18 «At Sir Chr. Wren... He was making up my principle about arches and alterd his module by it».

19. G. Poleni. 1748. *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano* (Padova: Nella Stamperia del Seminario).
20. D. Gregory. 1687. «Catenaria,» *Philosophical Transactions* 231: 637–652.
21. J. Stirling. 1717. *Lineae Tertii Ordinis Newtonianae* (Oxford: E. Whistler).
22. J. Moxon. 1703. *Mechanick Exercises* (Londres: D. Midwinter).
23. L. B. Alberti. 1988. *On the art of building* (trad. de Joseph Rykwert et al.). (Cambridge, MA: MIT Press).
24. «The Ingenious Surveyor Mr. Hook, made use of this Artifice, as I am informed, in building the Lord

Montague's brave House in Bloomsbury, in the County of Middlesex».

25. D. McKitterick (ed.).1995. *The Making of the Wren Library, Trinity College, Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press).

Capítulo 7

1. C. A. Coulomb. 1773. «Essai sur une application des régles de maximis et minimis à quelques problémes de statique relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savants & lus dans ses assemblées (Paris)* 7: 343–382.
2. J. Heyman, J. 1972. *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: Cambridge University Press). Reimpreso por la Imperial College Press, 1997. Contiene una repdroducción facsímil del *Essai* de Coulomb, con la traducción al inglés y notas críticas.
3. B. F. Bélidor. 1729. *La science des ingénieurs* (París: Claude Jombert).
4. C. A. Coulomb. 1821. *Théorie des Machines Simples* (París: Bachelier).
5. A. Parent. 1713. *Essais et recherches de Mathématique et de Physique*. 3 vols (París: Jean de Nully).
6. G. Galilei. 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove sicenze* (Leida: Elsevirius).
7. J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]
8. R. de Prony. 1802. *Recherches sur la poussee des terres* (París: Imprimerie de la République).
9. A. L. Cauchy. 1823. «Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques,» *Bulletin des sciences par la Societé Philomathique de Paris*: 9–13
10. V. V. Sokoloskii. 1960. *Statics of soil media* (trad. por D. H. Jones y A. N. Schofield) . (Londres: Butterworths).
11. K. Terzaghi. 1943. *Theoretical soil mechanics* (Nueva York,: Wiley)
12. C. L. M. H. Navier. 1826. *Resumé des leçons donnés à l'Ecole des ponts et chaussées* (París: Firmin Didot).

Capítulo 8

Referencias:

G. Galilei. 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove sicenze* (Leida: Elsevirius). Trad. inglesa de S. Drake: *Two New Sciences*. Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1974.

C. L. M. H. Navier. 1833. *Resumé des Leçons donnés à l'Ecole des Ponts et Chaussés*. 2ª ed. (París: Carilian-Goeury).

Para una bibloigrafía más completa sobre distintos aspectos de la historia del análisis de estructuras, véase:

Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004).]

Capítulo 9

G. Galilei (1638). *Discorsi e Dimostrazione Matematichi, intorno à due nuove scienze Attenenti alla Mecanica e i Movimenti Locali* (Leida: Elsevirius). Numerosas traducciones, entre ellas: S. Drake. *Two New Sciences*. Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1974.

J. Heyman. *Structural analysis: a historical approach*. Cambridge: Cambridge University Press. [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004).]

A. Andrea. 1570. *I quattro libri dell'Architettura* (Venecia: Dominico de' Franceschi). Diferentes reediciones y traducciones, entre ellas la de Isaac Ware: *Palladio's Architecture* (Londres: Isaac Ware,1738), reimpresa en 1965 por Dover Publications Inc. Nueva York.

J. Rondelet. 1834. *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. 7ª ed. (París: Firmin Didot).

D. T. Yeomans. 1992. *The Trussed Roof: its History and Development* (Aldershot: Scolar Press).

G. Zorzi. 1967. *Le chiese e i ponti di Andrea Palladio* (Venecia: Pozza).

Agradecimientos: El autor está agradecido a David Yeomans por sus comentarios sobre este artículo.

Capítulo 10

P. Abraham. 1934. *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie.).

H. M. Colvin. 1975. *The History of the King's Works. Vol. III: 1485 –1660. Part I* (Londres: HMSO).

J. Fitchen. 1961. *The construction of gothic gathedrals: A study of medieval vault erection* (Oxford: Clarendon Press).

D. Gregory. 1697. «Catenaria,» *Philosophical Transactions of the Royal Society* 19, nº 231: 637–652.

J. Heyman. 1971. *Plastic design of frames. Vol. 2: Applications* (Cambridge: Cambridge University Press).

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]

R. Hooke. 1675. *A description of helioscopes, and some other instruments* (Londres: J. Martyn).

R. T. Gunther. 1931. *Early Science in Oxford. Vol. 8: The Cutler lectures of Robert Hooke* (Oxford: The author): 119–52.

F. E. Howard. 1911. «Fan vaults,» *Archaeological Journal* 68: 1–42.

T. G. Jackson. 1915. *Gothic Architecture in France, England and Italy*, 2 vols. (Cambridge: At the University Press).

W. C. Leedy. 1980. *Fan vaulting: A study of form, technology and meaning* (Londres: Scolar Press).

W. C. Leedy. 1975. «The design of the vaulting of Henry VII's chapel, Westminster: a reappraisal,» *Architectural History* 18: 5–11.

F. Mackenzie. 1840. *Observations on the Construction of the Roof of King's College Chapell, Cambridge* (Londres: John Weale).

W. B. Parsons. 1939. *Engineers and Engineering in the Renaissance* (Baltimore: Wlliams & Wilkins). Reimpreso en 1968 por M. I. T. Press.

G. Poleni. 1748. *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario).

V. Sabouret. 1928. «Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures,» *Le Génie civil* 92: 205–209.

Villard de Honnecourt. c. 1235. *Lodge Book.* Véase: (1) R. Willis (trad. y ed.). 1859. *Vilars de Honecourt, Fasimile of the sketch-book of, with commentaries by J. B. A. Lassus and J. Quicherat*. Londres: T. H. and J. Parker; (2) H. R. Hahnloser. 1935. *Villard de Honnecourt* (Viena: Schroll). 2ª ed. Graz: 1972.

E. E. Viollet-le-Duc. 1858–1868. *Dictionnaire raisonnée de l'Architecture Française du XI au XVI siécle* (París: A. Morel). 10 vols.

R. Willis. 1842. «On the Construction of the Vaults of the Middle Ages,» *Transactions of the Royal Institute of British Architects* 1: 1–69.

R. Willis y J. W. Clark. 1866. *The Architectural History of the University of Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press). 4 vols.

Capítulo 11

P. Cowen. 1979. *Rose Windows* (Londres: Thames and Hudson).

J. Heyman. 1972. «'Gothic' construction in Ancient Greece,» *Journal of the Society of Architectural Historians* 31: 3–9. [Vol. 1 (cap. 8): 129–139.]

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999)]

Capítulo 12

E. Benvenuto. 1991. *An introduction to the history of structural mechanics. Part I: Statics and resistance of solids. Part II: Vaulted structures and elastic systems*. 2 vols. (Nueva York: Springer).

A. A. Gvozdev. 1938. «The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation,» *Proceedings of the conference on plastic deformations, December 1936. Akademiia Nauk, Moscow/Leningrad*: 1938 (en ruso). Traducido al inglés por R. M. Haythornthwaite: *International Journal of Mechanical Sciences* 1(1960): 322–35.

Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004)]

G. Kazinczy. 1914. «Test with clamped beams,» *Betonszemle* 2: 68–71, 83–87, 101–104 (en húngaro). Para un resumen en inglés véase S. Kaliszky. 1984. «Gábor Kazinczy 1889–1964,» *Periodica Pofytechnica* (Budapest) 28: 75–93. [Reproducción facsímil y traducción completa al inglés y al español en: G. Kazinczy. *Experimentos con barras empotradas* (Madrid: INTEMAC, 2000), con Prólogo de J. Calavera y una Introducción de P. Lenkei.]

C. L. M . H. Navier. 1826. *Resumé des leçons données a l'École des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique à l'etablissement des constructions et des machines* (París: Firmin Didot; 2ª ed., 1833; 3ª ed., con notas y apéndices de Saint-Venant, 1864.)

B. de Saint-Venant. 1864. «Historique abrégé de recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides». En: *Resumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées, sur l'application de la mécanique a l'etablissement des constructions et des machines*, 3ª ed. (París: Dunod): xc–cccxj.

S. P. Timoshenko. 1953. *History of Stregnth of Materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures* (Nueva York: McGraw-Hill). Reimpr. Nueva York: Dover, 1983.

I. Todhunter y K. Pearson. 1886–1893. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin.* 2 vols. en 3 partes (Cambridge: Cambridge University Press) Nueva York: Dover, 1960 (1a. ed. 1886). Reimpr. Nueva York: Dover, 1960.

C. Truesdell. 1960. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788*, Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, 2nd Series, 11.2 (Zurich: Orell Füssli).

——. 1964. *Essays in the history of mechanics* (Nueva York: Springer).

——. 1984. *An idiot's fugitive essays on science* (Nueva York: Springer).

——. 1987. *Great scientists of old as heretics in «the scientific method»* (Charlottesville: University of Virginia Press).

R. S. Westfall. 1980. *Never at rest: a biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).

Capítulo 13

W. J. Arkell. 1947. *Oxford stone* (Londres: Faber and Faber).

S. Bradley y N. Pevsner. 1998. *London, the City churches (The buildings of England)* (Londres:Penguin Books).

J. W. Campbell. 1999. «Sir Christopher Wren, The Royal Society, and the development of structural carpentry 1660–1710». PhD dissertation. University of Cambridge.

H. M. Colvin. 1995. *A biographical dictionary of British architects 1600–1840* (New Haven and Londres: Yale University Press). Primera edición, 1954.

H. M. Colvin. 1988. *The Canterbury Quadrangle: St. John's College, Oxford* (Oxford: Oxford University Press).

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]

J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 (cap. 6): 35–44.]

D. Knoop y G. P. Jones. 1935. *The London Mason in the seventeenth century* (Manchester, Londres: Manchester University Press, Quatuor Coronati Lodge Nº 2076). Impreso también en: *Ars Quatuor Coronatorum* 48 (i).

J. Lang. 1956. *Rebuilding of St Paul's after the great fire of London* (Londres: Oxford University Press).

H. W. Robinson y W. Adams. 1935. *The Diary of Robert Hooke 1672–1680* (Londres: Taylor and Francis).

M. Whinney. 1971. *Wren* (Londres: Thames and Hudson).

S. Wren. 1750. *Parentalia: or, Memoirs of the Family of the Wrens* (Londres: Osborn). Reimpr. Farnborough: Gregg Press 1965.

Capítulo 17

P. Abraham. 1934. *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie.).

F. Bond. 1906. *Gothic architecture in England* (Londres: B. T. Bastford).

S. Brown. 2003. *York Minster: An architectural history, c. 1220–1500*, (Swindon: English Heritage).

J. Fitchen. 1961. *The construction of gothic gathedrals: A study of medieval vault erection* (Oxford: Clarendon Press).

F. E. Howard y F. H. Crossley. 1927. *English church woodwork*. 2ª ed. (Londres: Batsford).

J. Q. Hughes. 1952–55. «The roofs of York Minster,» *The Yorkshire Archaeological Journal* 58: 474–495.

J. C. Rogers. 1931. «St. Albans Abbey Church: The Painted Wooden Vault over the Presbytery and Saint's Chapel,» *Transactions, St. Alban's and Hertfordshire Architectural and Archaeological Society*: 122–136.

Capítulo 18

1. R. T. Gunther (ed.). 1935. *Early Science in Oxford. Vol. 10: The life and work of Robert Hooke (part 4)*. (Oxford: The author). H. W. Robinson y W. Adams. 1935. *The Diary of Robert Hooke 1672–1680* (Londres: Taylor and Francis). Reimpr. Londres: Wykeham Publications, 1968.
2. M. 'Espinasse. 1956. *Robert Hooke* (Londres: Heinemann). Reimpr. Berkeley: University of California Press, 1962.
3. L. T. More. 1944. *The Life and Works of the Honourable Robert Boyle* (Londres: Oxford University Press).
4. S. Wren. 1750. *Parentalia: or, Memoirs of the Family of the Wrens* (Londres: Osborn). Reimpr. Farnborough: Gregg Press 1965.
5. H. M. Colvin. 1995. *A biographical dictionary of British architects 1600–1840* (Newhaven and Lon-

dres: Yale University Press). Primera edición, 1954.
6. R. S. Westfall. 1980. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).
7. J. Andrews et al. 1997. *The History of Bethlehem* (Londres: Routledge). E. G. O'Donoghue. 1914. *The Story of Bethlehem Hospital From its Foundation in 1247* (Londres: T. Fisher Unwin). D. Russell. 1997. *Scenes from Bedlam* (Londres: Baillère Tindall). A. Scull. 1996. *Masters of Bedlam* (Princeton: Princeton University Press). Ch. Stevenson. 1996. «Robert Hooke's Bethlem,» *Journal of the Society of Architectural Historians* 55: 254–75.
8. En inglés *slam* significa «dar un portazo».
9. «At Belinsgate, Mr. Hawes. With Dr. Allen at Bedlam. Viewd Morefields for new Bedlam. Drew up report for him. At Sir W. Turner. Undertook new Designe of it. DH. Met Esq. Warder at the Wardrob and designed staires, windows, doors &c. Bought next the Blew Anchor in Duck Lane, *Clusis rariorum plantarum historia* 6s., and *ejusdem exoticorum libri* l0s., *cum observationibus* P. Belloni 4s., Cardanus *de proportionibus* and Algebra 2s. Paid him by Harry. At Garaways. Drank Tea which drove away all sleep and much disturbed me. Slept distemperd, sweat much. I paid Harry. Bette Orchard first came. At Garaways, Colwall, Wild, Aubery, Collins, &c. Collins his life, &c.».
10. D. Knoop y G. P. Jones. 1935. *The London Mason in the seventeenth century* (Manchester, Londres: Manchester University Press, Quatuor Coronati Lodge Nº 2076). Impreso también en: *Ars Quatuor Coronatorum* 48 (i).
11. J. Harvey. 1987. *English Mediaeval Architects,* 2ª ed. (Londres: Alan Sutton). L. F. Salzman. 1952. *Building in England Down to 1540* (Oxford: Clarendon Press).
12. J. Lang. 1956. *Rebuilding St. Paul's after the Great Fire of London* (Londres: Oxford University Press).
13. L. B. Alberti. 1988. *On the art of building* (trad. de Joseph Rykwert et al.). (Cambridge, MA: MIT Press).
14. D. McKitterick (ed.).1995. *The Making of the Wren Library, Trinity College, Cambridge* (Cambridge: Cambridge University Press).
15. J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 (cap. 6): 35-44.]

Capítulo 20

A. Choisy. *Histoire de l'Architecture*. París: G. Béranger, 1899.

J. Heyman. 1972. «'Gothic' construction in Ancient Greece,» *Journal of the Society of Architectural Historians* 31: 3–9. [Vol. 1 (cap. 8): 129–139.]

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]

J. Heyman. 1985. «The crossing piers of the French Panthéon,» *The Structural Engineer* 63: 230–234. [Vol. 1 (cap. 21): 279–286.]

C. F. da Passano. 1993. «Preservation of the Duomo of Milan,» *Structural Engineering International* 3: 17–19.

J. Heyman, «The vibration of masonry pinacles» *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*, En: S. Sánchez-Beitia, C.A. Brebbia, eds. (Southampton, 1997). [Vol. 2 (cap. 5): 29–34.]

Capítulo 21

L. Callebat. 1973. *Vitruve, de I 'architecture. Livre VIII* (París: Les Belles Lettres).

A. Choisy. 1865. «Note sur la courbure dissymétrique des degrés qui limitent au couchant la plate-forme du Parthénon,» *Comptes rendus de l'Académie des Inscriptions et Bellles-Lettres - Donnaud*: 413–417.

A. Choisy. 1899. *Histoire de I 'architecture*. 2 vols. (París: Gauthier-Villars).

A. Choisy. 1909–10. *Vitruve*. 2 vols. (París: Lahure). Nueva edición: París: F. de Nobele, 1971.

W. B. Dinsmoor. 1950. *The architecture of Ancient Greece*. 3ª ed. (Londres: Batsford).

P. Gros. 1990. *Vitruve, de I 'architecture,. Livre III*. (París: Les Belles Lettres).

D. S. Robertson. 1943. *A Handbook of Greek and Roman architecture*. 2ª ed. (Cambridge: Cambridge University Press).

I. D. Rowland y T. N. Howe. 1999. *Vitruvius, Ten books on architecture* (Cambridge: Cambridge University Press).

J. Sulpicius Verulanus. 1487(?). *Vitruvii Pollionis de Architectura libri decem, edente Johanne Sulpitio* (Roma: Hero1t, s. a.). Editio Princeps.

H. L. Warren. 1960. *Vitruvius, the ten books on architecture* (Nueva York: Dover Publications).

Capítulo 22

Amontons, G., 1699: «De la résistance causée dans les machines ...,» *Histoire de l'Académie Royale des Sciences (Paris)* 1699, París (1702).

A. Becchi y F. Foce. 2002. *Degli Archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia* (Venecia: Marsilio, 2002).

E. Benvenuto. 2006. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. (Roma: Edizioni di Storia e Letteratura). Nueva edición. [1ª ed. (Florencia: Sansoni, 1981).]

P. Couplet. 1729,1730. «De la poussée des voûtes,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris,* 1729: 79–117; 1730: 117–141.

A. F. Frézier. 1737–39. *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture* (Strasbourg/París: Charles-Antoine Jombert, 1737–39). 3 vols.

F. J. von Gerstner. 1831–34. *Handbuch der Mechanik* (Praga: Spurny). 3 vols.

J. Heyman. 1969. «The Safety of Masonry Arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11: 363–385. [Vol. 1 (cap. 6): 93–112.]

J. Heyman, J. 1972. *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: Cambridge University Press). Reimpreso por la Imperial College Press, 1997.

P. de La Hire. 1695. *Traité de méchanique* (París: Imprimirie Royal).

P. de La Hire. 1712. «Sur la construction des voûtes dans les édifices,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris:* 69–77.

M. G. Lamé y E. Clapeyron. 1823. «Mémoire sur la stabilité des voûtes,» *Annales des Mines* 8: 789–836.

H. Moseley. 1843. *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture* (Londres: Longman, Brown, Green and Longmans).

J. A. Ochsendorf. 2006. «The masonry arch on spreading supports,» *The Structural Engineer* 84: 29–35.

S. P. Timoshenko. 1953. *History of Stregnth of Materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures* (Nueva York: McGraw-Hill). Reimpr. Nueva York: Dover, 1983.

Capítulo 23

1. J. F. Baker. 1954. *The Steel Skeleton. Vol. 1: Elastic behaviour and design* (Cambridge: Cambridge University Press).
2. J. F. Baker, M. R. Horne y J. Heyman. 1956. *The Steel Skeleton. Vol. 2: Plastic behaviour and design* (Cambridge: Cambridge University Press).
3. A. A. Gvozdev. 1938. «The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation,» *Proceedings of the conference on plastic deformations, December 1936. Akademiia Nauk, Moscow/Leningrad*: 19–38 (en ruso). Traducido al inglés por R. M. Haythornthwaite: *International Journal of Mechanical Sciences* 1(1960): 322–35.
4. J. Heyman. 1987. «John Fleetwood Baker. Baron Baker of Windrush. 1901–1985,» *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 33: 1–20.
5. Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004).]
6. J. Heyman. 2008. *Basic Structural Theory* (Cambridge: Cambridge University). [Trad. esp.: *Teoría básica de estructuras* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2011).]
7. J. Heyman, J. C. H. Finlinson y R. P. Johnson. 1966. «Inglis A: a fully rigid multi-storey welded steel frame,» *The Structural Engineer* 44: 435–441.
8. R. P. Johnson, J. C. H. Finlinson y J. Heyman. 1965. «A plastic composite design,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 32: 198–209.
9. Joint Committee of the Welding Institute and the Institution of Structural Engineers. 1964. *Report on Fully-rigid multi-storey welded steel frames.Report/Supplement/Second Report* (Londres: Institution of Structural Engineers).
10. H. Maier-Leibnitz. 1936. «Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse,» *Preliminary Publication, Second Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering,* Berlín: 97–130.
11. A. J. S. Pippard y J. F. Baker. 1936. *The Analysis of Engineering Structures* (Londres: Edward Arnold). Sucesivas ediciones en 1943, 1957, 1962 y 1968.
12. SSRC. 1931/1934/1936. *Steel Structures Research Committee. First Report/Second Report/Final Report* (Londres: HMSO).

Capítulo 24

Las referencias históricas en este artículo están bien documentadas (a parte de la discusión del conoide parabólico-cúbico de Hooke, que se ofrece en:

J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 cap. 6): 35-44.]

Por lo demás, se pueden encontrar detalles en:

J. Heyman. 1982. *The masonry arch* (Chichester: Ellis Horwood).

J. Heyman, J. 1972. *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: Cambridge University Press). Reimpreso por la Imperial College Press, 1997.

Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004).]

Capítulo 25

L. Euler. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti* (Lausana: Bousquet)

G. Galilei. 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove sicenze* (Leida: Elsevirius).

A. V. Grimstone. 2009. *Building Pembroke Chapel: Wren, Pearce and Scott* (Cambridge: Pembroke College).

J. Harvey. 1958. «Mediaeval design,» *Transactions of the Ancient Monuments Society. New Series* 6: 55–72.

J. Heyman, J. 1972. *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: Cambridge University Press). Reimpreso por la Imperial College Press, 1997.

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]

Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004).]

J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 (cap. 6): 35-44.]

P. de La Hire. 1695. *Traité de méchanique* (París: Imprimirie Royal).

A. Parent. 1713. *Essais et recherches de Mathématique et de Physique*. 3 vols (París: Jean de Nully).

Capítulo 26

P. Abraham. 1934. *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie.).

W. H. Barlow. 1846. «On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction,» *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5: 162–182.

J. W. P. Campbell. 2007. *Building St Paul's* (Londres: Thames & hudson).

J. Heyman. 1977. *Equilibrium of shell structures* (Oxford: Oxford University Press).

J. Heyman. 1995. *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, 1999).]

Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach* (Cambridge: Cambridge University Press). [Trad. esp.: *Análisis de estructuras. Un estudio histórico* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004)]

J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 (cap. 6): 35-44.]

J. Heyman. 2008. *Basic Structural Theory* (Cambridge: Cambridge University). [Trad. esp.: *Teoría básica de estructuras* (Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2011)]

S. Huerta y P. Fuentes. 2010. «Analysis and demolition of some vaults of the Church of La Peregrina in Sahagún (Spain),» *Advanced Materials Research* 133–134: 343–348.

F. Mackenzie. 1840. *Observations on the Construction of the Roof of King's College Chapell, Cambridge* (Londres: John Weale).

J. A. Ochsendorf. 2010. *Guastavino vaulting: The art of atructural tile* (Nueva York: Princeton Architectural Press).

G. Poleni. 1748. *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario).

Capítulo 27

1. J. Bentham. 1771. *The history and antiquities of the conventual and cathedral church of Ely, from the foundation of the monastery, A.D. 673, to the year 1771* (Cambridge: At the University Press).
2. J. Maddison. 2000. *Ely Cathedral: Design and Meaning* (Ely: Ely Cathedral).
3. A. V. Grimstone. 2009. *Building Pembroke Chapel: Wren, Pearce and Scott* (Cambridge: Pembroke College).
4. J. Heyman. 2003. «Wren, Hooke and partners,» *Proceedings of the First International Congress on Construction History*, S. Huerta ed. (Madrid: Instituto Juan de Herrera): 3–9. [Vol. 2 (cap. 13): 111-117.]
5. «...the Tower from Top to Bottom, and the next adjacent Parts, are such a Heap of Deformities, that no judicious Architect will think it corrigible, by any Expence that can be laid out upon new dressing it, but that it will still remain unworthy the rest of the Work, infirm and tottering; and for these Reafons, as I conjecture, was formerly resolv'd to be taken down.

I cannot propose a better Remedy, than by cutting off the inner Corners of the Cross, to reduce this middle Part into a spacious *Dome* or *Rotunda*, with a *Cupola*, or hemispherical Roof, and upon the *Cupola*, (for the outward Ornament) a *Lantern* with a spiring Top. . .». S. Wren. 1750. *Parentalia: or, Memoirs of the Family of the Wrens* (Londres: Osborn).

6. J. Heyman. 1998. «Hooke's cubico-parabolical conoid,» *Notes and Records of the Royal Society of London* 52: 39–50. [Vol. 2 (cap. 6): 35-44.]
7. G. Higgott. 2009. «Geometry and Structure in the Dome of St Paul's Cathedral». En: *Compass and Rule*, A. Gerbino y S. Johnston, eds. (New Haven: Yale University Press): 55–169.
8. J. W. P. Campbell. 2007. *Building St Paul's* (Londres: Thames & hudson).
9. J. Heyman, «Hooke's cubico-parabolical conoid,» (Nota 6).
10. J. Heyman, «Wren, Hooke and partners,» (Nota 4).

Índice alfabético

Los números en cursiva se refieren a páginas en las que aparece una ilustración o tabla relacionada con la entrada correspondiente o con el autor citado.

Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
***Colección dirigida por* Santiago Huerta**

M. Arenillas et al. **V Congr. Historia de la Construcción**

F. Bores et al. **II Congreso Historia de la Construcción**

A. Casas et al. **I Congreso Historia de la Construcción**

A. Choisy. **El arte de construir en Roma**

A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**

A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**

A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)

I. J. Gil Crespo. **Construcción fortificada**

J. Girón y S. Huerta. **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**

A. Graciani et al. **III Congr. Historia de la Construcción**

R. Guastavino. **Escritos sobre construcción cohesiva**

J. Heyman. **Análisis de estructuras**

J. Heyman. **El esqueleto de piedra**

J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**

J. Heyman. **Estructuras de fábrica. 2 vols**

J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**

J. Heyman. **Vigas y pórticos**

S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas**

S. Huerta. (ed.) **IV Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VI Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VII Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VIII Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta. (ed.) **Las bóvedas de Guastavino en América**

S. Huerta. (ed.) **History of the Theory of Structures**

S. Huerta (ed.) **Pr. 1st. Int. Congr. Construction History**

J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)

J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el XVIII**

H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)

G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**

H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**

A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**

E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**

R. Willis. **Construcción de bóvedas en la Edad Media**

ISBN: 978-84-9728-546-9

9 788497 285469